Högskolan i Halmstad
Sektionen för lärarutbildning
Lärarprogrammet 240 hp

”Hur tänker du?”

- en studie om elevers variation av lösningsstrategier inom det pre-algebraiska området

Examensarbete 15 hp
Slutseminarium: 2012-01-11
Författare: Catharina Ahlin och Zandra Nilsson
Handledare: Carina Stenberg och Jan-Olof Johansson
Medexaminatorer: Fredrik Hansson och Jörgen Johansson
Examinator: Anders Nelson

Sammanfattning

Detta är en empirisk studie som har syftat till att synliggöra vilka strategier elever i årskurs två har använt när de löst öppna utsagor samt vilka missuppfattningar som förekommit i samband med detta. Studien har även syftat till att synliggöra hur eleverna har kunnat relatera öppna utsagor till vardagliga sammanhang. Vid datainsamlingen, som utfördes på två olika skolor, genomfördes 15 kvalitativa intervjuer vilka kombinerades med observationer.

Eftersom det i uppsatsens syfte finns en underförstådd relation till fenomenografin och hermeneutiken i form av såväl teorier som metodologier har dessa forskningsansatser varit en stor inspirationskälla i vår undersökning. Vidare har vi genom vår studie visat att de strategier som elever använder när de löser slutna utsagor till stora delar även används när eleverna löser uppgifter i form av öppna utsagor. Resultatet har visat på en bred variation i elevernas lösningsstrategier och det framgår att eleverna, vid deras lösningar av öppna subtraktionsutsagor, knappt använder de tre vanligaste subtraktionsstrategierna. Istället använder de bland annat en strategi som ger upphov till flera missuppfattningar. Det visade sig även att samtliga elever hade svårt att relatera öppna utsagor till vardagliga sammanhang.

Nyckelord: *strategier, öppna utsagor, pre-algebra, subtraktion, addition, vardagliga sammanhang, missuppfattningar, elever*

Förord

Detta examensarbete har vi gjort under vårt sista år på lärarprogrammet med inriktning mot barn, matematik och naturorienterande ämnen. Vi har från början till slut diskuterat och skrivit alla arbetets delar tillsammans vilket har bidragit till att våra tankar under arbetets gång både har utmanats och bekräftats på olika sätt. Däremot har vi, för att utnyttja möjligheten att tillgodogöra oss så mycket litteratur som möjligt, delat upp litteraturen mellan oss för att sedan samtala kring innehållet och åter fördjupa oss i väsentliga och intressanta delar.

Vi vill här också rikta ett varmt tack till alla som har bidragit till att vår undersökning har varit möjlig att genomföra. Detta gäller framförallt de elever som medverkat i vår studie samt deras vårdnadshavare som har visat stort intresse. Vi vill även tacka klasslärarna som har gett oss möjlighet att intervjua eleverna på lektionstid. Därefter vill vi rikta ett stort tack till våra handledare för goda råd och värdefulla synpunkter under arbetets gång. Något som vi också vill uppmärksamma är alla fantastiska vänner som stöttat oss. Tack för ert engagemang i vårt skrivande. Sist men inte minst vill vi även visa uppskattning till våra underbara familjer för att ni stått ut med oss som smått frånvarande och stressade under denna period. Tack!

Halmstad den 1 januari, 2012

Catharina Ahlin och Zandra Nilsson

Innehållsförteckning

1. Inledning och bakgrund

Skolans främsta uppdrag, att förmedla kunskap, är mycket viktigt då det bidrar till att utveckla självständiga individer med förutsättningar att påverka och fatta välgrundade beslut i vårt demokratiska samhälle (Skolverket, 2011). Av de ämnen som lärs ut i skolan har vi valt att fokusera på just matematik då internationella undersökningar som TIMSS[1] (Skolverket, 2008) och PISA[2] (Skolverket, 2010a) har visat på en kraftig försämring av svenska elevers resultat inom detta område. I kursplanen för matematik står det att ”kunskaper i matematik ger människor förutsättningar att fatta välgrundade beslut i vardagslivets många valsituationer och ökar möjligheterna att delta i samhällets beslutsprocesser” (Skolverket, 2011, s.62).

Under vår utbildning har det rådande förhållandet, med elevers nedåtgående resultat i matematik, varit mycket omdiskuterat. Detta har således också väckt vårt intresse för hur elevers resultat kan förbättras, då vi som blivande matematiklärare har haft många tankar kring hur matematikundervisningen kan utvecklas. Vi ser därför att en lämplig utgångspunkt, i syfte att utveckla matematikundervisningen, kan vara att börja hos eleverna och deras förförståelse. I didaktisk mening innebär detta att pedagoger måste förstå hur elever tänker för att kunna hjälpa dem framåt. Därför har vi i vår undersökning valt att rikta in oss mot ett område inom matematiken där Skolverket (2010b) menar att ett stort antal elever ofta fallerar, nämligen inom pre-algebra. Detta visade sig i redovisningen av de nationella proven i årskurs tre från 2009 där 15 procent av eleverna svarade fel vid pre-algebraiska uppgifter.

Löwing (2011) ser att många pedagoger inte inser vikten av att undervisa i detta område inom matematiken. Vårt mål med undersökningen är därför att synliggöra vilka strategier elever använder sig av när de löser pre-algebraiska uppgifter i form av öppna utsagor eftersom vi under vår verksamhetsförlagda utbildning har uppmärksammat att det är något som många elever har svårt för. Vi kommer vidare att studera hur eleverna knyter an denna typ utav uppgift till vardagliga sammanhang då kursplanen i matematik poängterar vikten av att vardagsanknyta matematiken (Skolverket, 2011). Vi har sökt men inte funnit någon liknande studie på området vilket har inneburit att vi istället har sammanställt och utgått från tidigare forskning om hur elever löser och relaterar slutna utsagor till vardagliga sammanhang.

Persson (2010) hävdar att aritmetik och algebra är de två ben som hela matematiken vilar på. Vidare poängterar han det faktum att algebra gynnar problemlösningsförmågan och att det är något som måste tränas under en lång tid. Därmed anser han att det måste finnas en röd matematisk tråd från förskolan till gymnasiet med en stegrande svårighetsgrad i algebra.

[1] Trends in International Mathematics and Science Study
[2] Programme for International Student Assessment

Vi har genom detta examensarbete valt att göra en empirisk undersökning där vi inspirerats av fenomenografin och hermeneutiken som både teorier och metodologier. Därigenom vill vi synligöra variationen av elevernas lösningsstrategier. Dock har vi inte någon uppfattning om hur denna variation kommer att se ut. Utifrån fenomenografin och hermeneutiken finner vi att kvalitativa intervjuer lämpar sig bäst för vår studie. I samband med detta ser vi däremot problematiken i att det kan bli svårt för eleverna att förklara hur de tänker när de löser öppna utsagor då flertalet förmodligen har automatiserade kunskaper inom talområdet 0-20. Detta har vi haft i åtanke när vi genomfört vår undersökning.

1.1. Syfte och avgränsning

Vår uppsats syftar till att synliggöra vilka strategier elever i årskurs två använder sig av när de löser öppna utsagor samt vilka missuppfattningar som förekommer i samband med detta. Uppsatsen syftar även till att belysa hur eleverna kan relatera denna typ av uppgifter till vardagliga sammanhang. Med forskningsprojektet avser vi att endast undersöka elever i två olika skolor belägna i sydvästra Sverige.

1.1.1. Frågeställningar

– Vilken variation av strategier förekommer i samband med att elever i årskurs två löser öppna additions- och subtraktionsutsagor?

– Vilka missuppfattningar förekommer bland eleverna när de löser dessa uppgifter?

– Hur relaterar eleverna denna typ av uppgifter till vardagliga sammanhang?

1.1.2. Begrepps definition

Nedan har vi förtydligat vad vi avser med några av de begrepp vi använder i uppsatsen.

- *Lägre talområde* – tal från 0-10.
- *Högre talområde* – tal från 10 och uppåt.
- *Strategier* – de sätt som elever använder för att lösa uppgifter.
- *Missuppfattningar* – vanliga och kända svårigheter hos elever inom området.
- *Pre-algebra* – uppgifter med okända termer vilka används som förövningar till algebra.
- *Slutna utsagor* – en uppgift utan okända variabler t. ex. 4+5=9 och 9-6=3.
- *Öppna utsagor* – additions- och subtraktionsuppgifter där den andra termen i uppgiften är okänd t. ex. 4+__=9; 9-__=3; 17+__=21 och 26-__=19.

2. Litteraturgenomgång

I följande avsnitt kommer vi att behandla delar av tidigare forskning som rör taluppfattning och aritmetik. Eftersom vi har gett oss in på ett område som är relativt outforskat tar vi mestadels upp hur elever löser slutna utsagor för att sedan relatera detta till vårt eget forskningsområde. Enligt Marton och Booth (2000) är lärande i grundläggande aritmetik ett av de mest beforskade områdena i pedagogik. Inom detta område har även forskarna ett samstämmigt synsätt gällande utvecklingsmönstrets huvuddrag. Vi belyser denna utveckling genom forskare som t. ex. Kilborn (1989), Löwing (2008) och Ahlberg (1992). Vidare tar vi även upp missuppfattningar som förekommer i samband med att elever löser öppna utsagor samt vikten av att eleverna ser sambandet mellan ”skolmatematik” och vardagsmatematik”.

För att utföra beräkningar av olika slag, krävs att eleven har en god taluppfattning. Eftersom talområdet 1-10 utgör grunden för vårt positionssystem poängterar Ahlberg (1995) vikten av att eleverna har goda kunskaper inom området. Löwing (2008) anser att en välutvecklad taluppfattning innebär att kunna talens ordning och grannar[3] samt positionssystemet med basen 10. Vidare ingår kunskaper om de grundläggande räknelagarna[4], tals uppdelning i termer och faktorer samt förmågan att storleksordna och avrunda tal.

2.1. Subitizing och ramsräkning

Det är tidsbesparande att kunna uppfatta antal utan att behöva räkna. Detta menar Solem och Reikerås (2004) då de ser att träning i att uppfatta enskilda element som en helhet är viktig i barnets tidiga utveckling. Malmer (2002) samt Johansson och Wirth (2007) beskriver också denna förmåga, att uppfatta så kallade *talgestalter*, som bland annat kan tränas genom sånger och ramsor där eleverna får visa antal på fingrarna. Även tärningar kan vara till hjälp då prickarna är placerade i ett speciellt mönster. Detta hänger ihop med vad Johansson och Wirth (2007) kallar för spontan antalsuppfattning – *subitizing*. Denna förmåga anses vara medfödd och innebär att barn väldigt tidigt kan addera och subtrahera då de omedelbart kan avgöra hur många föremål de ser framför sig, om antalet föremål är under 5. När ett barn senare lär sig tala, är ramsräkning en vanlig sysselsättning. Detta menar Malmer (2002) samt Doverborg och Pramling Samuelsson (2007) då de beskriver ramsräkning som uppräkning av räkneorden, utan att barnet har en förståelse för ordens innebörd. Johansson och Wirth (2007) ser att ramsräkning är den första grundbulten i barns taluppfattning.

[3] Talets grannar är de tal som kommer före respektive efter ett visst tal.

[4] De kommutativa räknelagarna: $a + b = b + a$ och $a \cdot b = b \cdot a$, de associativa räknelagarna: $(a + b) + c = a + (b + c)$ och $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, den distributiva lagen: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Löwing, 2008 s. 40)

2.2. Strategier vid addition

Den strategi som eleven väljer att använda vid addition, där två eller flera termer ska räknas ihop till en summa, är beroende av var eleven befinner sig i sin taluppfattningsutveckling. Efter en tid när barnet har lärt sig att använda talorden för att räkna antal har barnet förvärvat vad Johansson och Wirth (2007) benämner *kardinaltalsuppfattning.* Kardinaltal är ett matematikdidaktiskt begrepp och betecknar barns förståelse av talord som antal.

Ahlberg (1995) anser att fingrarna har en betydande roll i barns lärande av fundamentala talbegrepp och den vanligaste strategin i denna taluppfattning kan jämföras med vad Doverborg och Pramling Samuelsson (2007) kallar för *en till en korrespondens med siffersymboler*. Kilborn (1989) som kallar denna strategi för *ett till ett-principen* menar att den innebär att eleverna anger en siffra per föremål vilka vanligtvis utgörs av elevens fingrar, se vidare Gelman och Gallistel (1978). Många elever som använder strategin upplever ofta addition som ett mer lättbegripligt räknesätt än subtraktion. Detta menar Olsson och Forsbäck (2008) då de ser att dessa elever kan få svårare att räkna nedåt vid subtraktion.

Ahlberg (1992), Kilborn (1989) samt Solem och Reikerås (2004) beskriver olika strategier som elever använder i samband med fingerräkning då ett finger får representera ett tal. En av dessa strategier kallar de för *uppräkning från början.* Eleverna gör då, med sina fingrar, en uppräkning av den första termen i uppgiften för att sedan göra likadant med den andra. Eleven räknar sedan ut summan genom att göra en ytterligare uppräkning från början där termerna sammanfogas till en helhet. Även Johansson och Wirth (2007) har gjort en beskrivning av denna strategi men de har istället valt att kalla den för *räkna ental i tre steg.* Här poängterar dock författarna att det inte nödvändigtvis behövs fingrar eller andra faktiska föremål då det för en del elever även fungerar med inre bilder att hänga upp räkningen på. Solem och Reikerås (2004) påstår att dessa bilder kan bestå av antingen prickar eller streck.

Då elever oftast använder *räkna ental i tre steg* ihop med fingrar eller föremål ser Kilborn (1989) att många elever har ett behov att fysiskt markera vad som händer i operationen när de olika mängderna ska adderas. Solem och Reikerås (2004) samt Johansson och Wirth (2007) beskriver även en mer avancerad strategi – *räkna ental i två steg* – som är en kombination av fingerräkning och inre föreställningar. Eleven räknar ut summan direkt genom att konstruera en bild av det sista talet med fingrarna innan uppräkningen av det första påbörjas.

Steget till nästa taluppfattning – *ordinaltalsuppfattning* – har avgörande betydelse för elevens matematiska utveckling och innebär att eleven knyter an talen till siffrorna i talraden. En strategi som Johansson och Wirth (2007) uppfattar som en brygga mellan kardinaltalsuppfattning och ordinaltalsuppfattning är *räkna från första/största* vilket är en vanlig strategi i de första skolåren. Ahlberg (1992) samt Johansson och Wirth (2007) ser att de som, vid uppgiften 4+5 använder strategin *räkna från första*, hanterar talet fyra som ett ordinaltal. Enligt Kilborn (1989), kommer eleverna då ihåg hur stor den första mängden är för att sedan räkna upp fem steg till nio. Doverborg och Pramling Samuelsson (2007) hävdar att eleven här behärskar kardinaltalsprincipen då de förstår att nio anger det antal föremål som finns i den uppräknade mängden. De som enbart använder denna strategi har inte upptäckt vad Ahlberg (1995) och Kilborn (1989) kallar för *uppräkning från det största talet.* Vid 4+5, börjar eleven istället på fem för att sedan räkna: sex, sju, åtta, nio. När eleven nått hit i sin matematiska utveckling har den också tagit till sig *principen för godtycklig ordning*, se vidare Gelman och Gallistel (1978). Det innebär enligt Kilborn (1989) att eleven har en förståelse för den kommutativa lagen. Neuman (1989) poängterar dock att det i en öppen utsaga av typen 2+__=9 inte går att tillämpa denna strategi då det största talet utgörs av den okända termen.

En ytterligare strategi som liknar de ovan nämnda, är den som Ahlberg (1992) kallar för *att gruppera fingrarna och se strukturer* vilket innebär att elever ofta grupperar den första termen som därigenom uppfattas som en helhet. Därefter räknar de upp den andra termen med ett finger i taget. Andra elever använder fingrarna för att se talens del-helhets-relation genom att gruppera varje term på fingrarna utan att göra någon uppräkning. En annan strategi som elever också använder är *upprepad addition* som enligt McIntosh (2010) är ett förstadium till multiplikation. Eleverna adderar då ett visst antal grupper med en lika stor mängd i varje grupp. Det innebära att en elev t. ex. adderar 4+4+4 vilket i multiplikation ses som $3 \cdot 4$.

2.3. Huvudräkning och strategiers generaliserbarhet

Huvudräkning är något som eleverna enligt Ahlberg (1992) ofta använder i kombination med t. ex. fingerräkning som små rörelser med fingrarna eller en nickning för varje tal. Rörelserna ger en sinnlig varseblivning av de tal som räknats. I kursplanen för matematik poängteras att undervisningen ska syfta till att utveckla sådana kunskaper hos eleverna som gör att de kan reflektera över och värdera valda strategier (Skolverket, 2011). Löwing (2008) och Kilborn (1989) ser därför att det inte räcker med att eleven lär sig de strategier vi hittills gått igenom då det även måste lära sig att förfina dem, och använda dem i större sammanhang. Eleverna måste alltså automatisera sina additionskunskaper om att addera två tal inom talområdet 1-10 då det annars kommer att bli för många deloperationer vid mer krävande uppgifter. Kilborn (1989) ser att vårt talsystem är mer komplicerat än t. ex. det egyptiska talsystemet där beräkningar skedde med enkla entalsoperationer. I vårt talsystem skriver vi inte ut alla tecken för t. ex. ental och tiotal utan döljer dem istället bakom siffror. Fördelen med denna teknik är att vi snabbt kan arbeta med större tal då vi kan "tänka med hjälp av siffrorna" (Kilborn, 1989 s.33). Därav poängterar Kilborn (1989) vikten av att elever får träna additionstabellen[5].

Ahlberg (1992) anser att *inlärda talfakta*[6] är vanligt bland elever inom talområdet 1-10 men att eleverna även använder sådana minneskunskaper vid större talområden. När eleven med tiden har införlivat en ordinaltalsuppfattning menar Ahlberg (1998) samt Johansson och Wirth (2007) att uppgiften 4+5 kan lösas direkt utan konkretisering då eleven uppfattar talen som siffror. Samma uppgift kan även lösas genom att 4+4=8; 8+1=9. Ahlberg (1995) kallar denna strategi för *omgestaltning av tal* då eleven har använt sig av ”dubblor” (4+4) och talkombinationer (8+1) som omgestaltning då det är vanligt att kombinera ”dubblor” med omgestaltning. Med utgångspunkt i gestaltpsykologins teori, om människans förmåga att uppfatta likheter, ser författaren en förklaring till varför ”dubblorna” är lätta att komma ihåg.

Ahlberg (1995) belyser problematiken kring att många elever saknar en bra huvudräkningsstrategi med få mellanled. Löwing (2008) ser att arbetsminnets kapacitet är begränsat och att en elev som inte behärskar de grundläggande strategierna får en ohanterlig mängd data att hålla reda på. Detta är en av orsakerna till varför elever gör misstag. Genom automatisering av grundläggande additionsstrategier lagras dessa i långtidsminnet vilket avlastar arbetsminnet. Ahlberg (1992) ser att ett förfaringssätt som underlättar huvudräkningen, är att omgestalta tal genom att t. ex. tänka i ”dubblor” och talkombinationer. Detta kan motverka att elever senare ställer upp enkla beräkningar som kan lösas i huvudet.

För att räkna uppgifter med tiotalsövergång anser Löwing (2008) att många elever använder strategin *talkamrater och uppdelning av tal*. Om de t. ex. ska räkna ut summan av 6+7 så är tiokamraterna här t. ex. 7+3. De måste då även kunna dela upp talet 6 i 3+3. Kombinationen av detta leder till att 7+6=7+(3+3)=(7+3)+3=10+3. För den här strategin behöver eleverna tillgodogöra sig associativa räknelagen. Att träna på att dela upp tal genom öppna utsagor som t. ex. 5=1+__ kan förbereda eleverna på att behärska ovanstående strategi. Dessa typer av uppgifter är även förövningar till subtraktion och förutsätter att eleverna har god taluppfattning inom talområdet 1-10. Löwing (2008) anser att den kommutativitet som är vanlig bland elever, då 10+3+5=10+5+3 vilket ger 13+5=15+3, inte leder till önskad generalisering. Den strategi som elever senare bör använda vid addition av tal som 13+5 är att använda lilla additionstabellen, 3+5=8, och sedan lägga till 10. Detta ser ut på följande sätt: 13+5=10+(3+5)=18. De som har automatiserat tabellen får lättare flyt i räknandet.

[5] Lilla additionstabellen utgörs av alla talkombinationer från 1+1 till 9+9.
[6] Inlärda talfakta innebär att eleven är så bekanta med uppgifterna att de kan beräkningarna direkt.

En ytterligare strategi är *tillämpning av skriftliga noteringar*. En av dessa skriftliga noteringar kan enligt Ahlberg (1992) vara att *markera på siffrorna*. När elever gör uppräkning av t. ex. talet tre kan de även på trean göra strategiska punktmarkeringar för att ha kontroll på uppräkningen. Ett annat sätt kan vara att *rita index* som innebär att eleverna drar streck eller ritar olika symboler. Den vanligaste skriftliga noteringen enligt Ahlberg (1992) är att eleverna *tecknar uträkningar* vilket är ett hjälpmedel för att underlätta huvudräkningen.

2.4. Strategier vid subtraktion

Subtraktion räknas som inversen till addition då subtraktion bildar differensen eller skillnaden mellan två termer. Både Adler (2007) och Ahlberg (2000) poängterar vikten av att elever inser att de kan använda addition som hjälp vid subtraktion och vice versa. Detta kan ses mot problematiken som Löwing (2011) belyser då många lärare inte undervisar kring öppna utsagor som t. ex. 4+__=9. Detta anser hon bero på lärares okunskap kring hur dessa uppgifter knyter an addition och subtraktion. Vidare ser McIntosh (2010) vikten av att eleverna lär sig se sambandet mellan t. ex. 21-17 och 17+__=21 för att kunna använda öppna utsagor som ett hjälpmedel vid subtraktion. Att många elever har svårare för subtraktion än addition är något som Löwing (2011) ser att lärare accepterar istället för att visa på likheterna i räknesätten genom öppna utsagor. Adler (2007) anser att principen för subtraktion egentligen är klar och tydlig då det handlar om att ta bort en del av en mängd där differensen är det som blir kvar.

Johansson (2011) menar att subtraktion är det svårare räknesättet eftersom eleverna vid flera strategier måste räkna ner samtidigt som de räknar upp. Att kunna räkneramsan i båda riktningarna är enligt Olsson och Forsbäck (2008) grundläggande vid subtraktion. Dock har elever svårare för nedåträkningar än uppåträkningar. Därav är det lättare att räkna ut uppgiften 5-4 genom uppåträkning än nedåträkning (4,3,2,1). Löwing och Kilborn (2003) nämner även tiotalsövergångar och lilla subtraktionstabellen[7] som viktiga förkunskaper vid subtraktion.

Kilborn (1989) påstår att det inom subtraktion finns tre problemtyper. Den första kallar han precis som Johansson (2011) för *ta bort* medan Solem och Reikerås (2004) har valt att benämna samma strategi för *räkna allt och sedan från början igen.* Detta innebär att eleven först räknar upp en grundmängd för att sedan räkna upp en delmängd ur grundmängden. Differensmängden får eleven genom att räkna återstoden. Den andra problemtypen har enligt Kilborn (1989) formen av en öppen utsaga. Denna benämner han, Johansson (2011) och Löwing (2008) som *lägga till* eller *komplettera* medan Solem och Reikerås (2004) benämner den som *tillväxtstrategin.* Denna använder eleverna när de skall räkna ut hur mycket som

[7] Lilla subtraktionstabellen är alla subtraktionskombinationer mellan 1-10.

fattas. Problemtypen kan illustreras genom att Måns har fyra kronor men vill köpa en boll som kostar nio kronor. Hur mycket pengar fattas han? För att lösa uppgiften räknar eleven ut hur mycket som ska läggas till från fyra för att komma upp i nio. Om detta hade varit en additionsuppgift hade det varit i form av en öppen utsaga enligt uppgiften 4+__=9. Solhem och Reikerås (2004) skiljer sig dock från Johansson (2011), Löwing (2008) och Kilborn (1989) då de anger *minskningsstrategin* som den tredje problemtypen vilken innebär att eleven vid t. ex. 9-4 utgår från nio och räknar nedåt till fyra i fem steg (8,7,6,5,4). De tre sistnämnda författarna uppger däremot *jämföra* som den tredje problemtypen. Här gör eleven en jämförelse genom att bilda par mellan delen och helheten vilket kan illustreras genom att eleven gör en rad med nio föremål för att därefter lägga fyra föremål i en rad bredvid. Därefter kan eleven se hur många föremål som blir ensamma. Många elever är enligt Neuman (1989) vana vid denna problemtyp eftersom de har använt den mycket när de gick i förskolan.

Kilborn (1989) tar även upp olika räknetekniker som han menar att elever lär sig allt eftersom de effektiviserar sitt räknande. En av dessa är *nedräkning till återstoden* som bygger på samma princip som den strategi vilken Solem och Reikerås (2004) kallar för *minskningsstrategin*. En liknande strategi som Kilborn (1989) kallar för *nedräkning till delen* handlar om att dela upp en mängd i två delmängder. Vid uppgiftsexemplet 9-4 räknar eleven ner till delen i fyra steg (8,7,6,5) och får då svaret fem. Vilken strategi eleven bör välja är beroende av uppgiften. Den sistnämnda strategin fungerar bra vid uppgifter som t. ex. 301-298 men vid uppgifter som t. ex. 301-3 är *nedräkning till återstoden* en lämpligare strategi.

I en öppen subtraktionsutsaga som t. ex. 9-__=3 räknar eleven ner från det största talet till det mindre. Dock ser vi att *nedräkning till delen* är en lämpligare strategi att använda vid denna uppgift då eleven kan räkna 8, 7, 6. Neuman (1989) menar att bakåträkning även kan användas vid öppna additionsutsagor. Ännu en strategi som Kilborn (1989) talar om är *uppräkning från delen*. Vid uppgiften 12-7 börjar eleven på sju för att sedan räkna upp till tolv i fem steg vilket är i likhet med strategin *lägga till/ komplettera*. Skillnaden ligger i att eleven, i den förstnämnda strategin, måste kontrollera hur många som har räknats upp vilket de inte behöver i den andra. Löwing (2008) påstår att strategin *lägga till/ komplettera* bygger på att eleven förstår att subtraktion är inversen av addition och hon menar att den sedan kan generaliseras till uppgifter inom ett högre talområde. Operationen 32-17 räknas ut på följande sätt: 17+3=20; 20+10=30; 30+2=32. Vidare tar Eriksson (2004) upp en ytterligare strategi där elever *relaterar till andra räkna bort uppgifter*. Om en elev vet att 15-5 är 10 kan den relatera detta till uppgifter som 15-6 vilket spar eleven en längre räkneprocedur. Elever kan även relatera uppgifter som skiljer i tiotal till varandra då exempelvis 17+4 kan relateras till 7+4.

Kompensationsstrategin är en utveckling av föregående strategi och Eriksson (2004) beskriver i samband med denna hur elever som vet att 15+15=30 kan addera och subtrahera på olika sidor om likhetstecknet för att lösa andra uppgifter. De kan därigenom exempelvis se att 14+16 är 30 eftersom de kan använda en kompensationsstrategi från uppgiften 15+15.

2.5 Missuppfattningar

I samband med att elever lär matematik stöter de på svårigheter och skapar missuppfattningar. En del gör det oftare än andra och McIntosh (2010) ser att många svårigheter kan bero på bristande begreppsförståelse. Vidare menar han att missuppfattningar ofta grundar sig på att elever har bristande erfarenhet eller att de fått otillräcklig undervisning. Om svårigheterna är djupt rotade kan de vara svåra att övervinna. I synnerhet om de har befästs genom missriktad färdighetsträning. För att behärska subtraktion menar Löwing (2008) att eleverna behöver kunna samordna ett antal begrepp. Dock kan eleverna uppfatta begreppen olika där vissa har en korrekt och generaliserbar uppfattning medan andra kan ha allvarliga missuppfattningar. Hur dessa missuppfattningar kan se ut visar sig i den strategi eleven använder för att lösa en uppgift. Eftersom elever allteftersom lär sig nya subtraktionstekniker är det viktigt att tidigt komma underfund med existerande missuppfattningar. I redovisningen av ämnesproven 2009 för grundskolans årskurs 3 ser Skolverket (2010b) att ett ofta förekommande felsvar vid den pre-algebraiska uppgiften 17=14+__ var 31 då hela 15 procent av eleverna adderade 17 och 14 istället för att t. ex. se hur mycket som fattas mellan de båda talen. En slutsats Skolverket drar av detta är att felsvaret kan bero på brister i förståelsen av likhetstecknets betydelse.

Ahlberg (2000) tar upp problematiken kring att elever som har arbetat för ensidigt med slutna utsagor kommer att få svårigheter när de möter uppgifter med en okänd term. Missuppfattningen som förekom i samband med uppgiften 17=14+__ kallar Marklund (1993) för *väljer ordning*. Detta kan, förutom additionsberäkningen ovan, även innebära att eleverna vid uppgiften 17+__=21 subtraherar entalen för sig och tiotalen för sig vilket ger 16. Författaren ser en fara i att elever löser huvudräkningsuppgifter med hjälp av ett sådant algoritmtänkande då denna strategi inte är utvecklingsbar eftersom den är svår att tillämpa vid högre tal. Hon ser även problem i att de inte reagerar och reflekterar över svarets orimlighet.

Palm (2011) ser att en anledning till detta kan vara att eleverna tillämpar mycket mekaniskt räknande och han har även visat på att många elever inte relaterar uppgifterna till vardagliga sammanhang. Detta ser han mot bakgrund av att verklighetstrogna uppgifter tycks påverka att många elever i större utsträckning ger rimliga svar på uppgifter.

2.6. Pre-algebra

Enligt Grønmo (1999) ställer algebra höga krav på abstrakt tänkande då bokstäver utgör symboler för variabler. Bergsten, Häggström och Lindberg (1997) menar därför att många upplever algebra som svårbegripligt utan mening. Dock menar Palm (2008) att algebra är lika viktigt inom matematiken som grammatiken är för språket. Djupa algebraiska kunskaper är ett kraftfullt verktyg vid problemlösning och vidare matematisk förståelse. På grund av detta menar författaren att algebra borde införas så tidigt och så ofta som möjligt i undervisningen för att eleverna ska se den som lika naturlig i matematiska sammanhang som aritmetik.

För att algebraundervisningen ska få en naturlig progression ser Bergsten m.fl. (1997) att det är lämpligt att börja arbeta med *pre-algebra* vilket innebär att elever arbetar med att lösa enkla ekvationer utan bokstäver. Genom olika aktiviteter kan eleverna successivt övergå från det aritmetiska till det algebraiska symbolspråket och tänkandet. Istället för att, som vid aritmetiskt tänkande, lägga sin uppmärksamhet på talen i olika operationer är det själva operationerna på talen som fokuseras i det algebraiska tänkandet. Häggström (1996) föreslår att elever bör ges möjlighet till bättre förståelse av algebra genom att bland annat arbeta med uppgifter av typen 4+__=9 där de får fylla i tal som ger sann utsaga. Grønmo (1999) och Häggström (1996) menar att många av de svårigheter som uppstår hos elever i samband med algebraiska uträkningar grundas i aritmetik. Dock synliggörs de inte förrän eleverna arbetar med algebra. Det är just förståelsen av aritmetiska operationer och likhetstecknets innebörd som är viktigt i elevernas senare arbete med symbolspråket. Wallby och Wallby (2007) påpekar därför vilken avgörande betydelse lärarens ambition och inställning till matematik har för hur det kommer gå för eleverna i detta abstrakta tänkande som algebra kan medföra.

2.7 Likhetstecknets betydelse

Elevernas förståelse för likhetstecknet har stor betydelse för hur de löser öppna utsagor. Beroende på om det handlar om öppna eller slutna utsagor behöver olika aspekter av likhetstecknets betydelse fokuseras. Norska studier visar enligt Grønmo (2011) att många elever har problem med uppgifter som t. ex. 9-__=3 eftersom det inte ska utföras något efter likhetstecknet vilket det ska i slutna utsagor. Hon menar precis som Kilborn (1989) att elever behöver reflektera över likhetstecknets betydelse i olika sammanhang. Vidare menar Kilborn (1989) att likhetstecknet kan utläsas på olika sätt. De som vid uppgiftsexemplet 4+5=9 säger att ”fyra plus fem *är* lika med nio” ger då likhetstecknet en statisk innebörd medan de som säger att ”fyra plus fem *blir* nio” ger det en dynamisk innebörd. Häggström (2011) anser att det är viktigt att införa ekvationer i tidig ålder eftersom det leder till att eleverna uppfattar likhetstecknets innebörd som statisk då likheten kan läsas åt båda håll. Att tillskriva likhetstecknet en dynamisk innebörd, då likheten bara kan läsas från vänster till höger, ser Bergsten m.fl. (1997) att många elever gör under de första skolåren vilket leder till att eleverna ser ekvationer av typen 13=4+__ som meningslösa. Idag är det enligt Grønmo (1999) allt vanligare att öppna utsagor som 4+__=9 och 9-__=3 finns i matematikböcker vilket innebär att eleverna därigenom måste reflektera över likhetstecknets flera olika betydelser.

Olsson och Forsbäck (1998) ser att det är många som tror att likhetstecknets innebörd är något som elever snabbt förstår för att sedan besitta denna förståelse år ut och år in utan någon repetition eller träning. Detta kan ses mot problematiken att brister i förståelsen av likhetstecknets innebörd påverkar elevernas möjlighet att förstå och lösa ekvationer. För att stärka elevernas förståelse av likhetstecknets betydelse kan det vara bra att använda en våg som illustrationsobjekt vilket ger eleverna möjlighet att arbeta med öppna utsagor. Adler (2007) ser precis som föregående författare att vågen är en god liknelse. Dock visar han samtidigt på att liknelsen inte är alldeles enkel. En våg kan visa jämvikt när det gäller *antal* men om föremålen är gjorda av samma material där det ena föremålet är större än det andra blir resultatet missvisande då vågen inte väger jämt på grund av skillnader i föremålens vikt.

För att likhetstecknets innebörd ska framgå helt klart menar Malmer (1984) att eleverna även behöver lära sig vad olikhetstecknet betyder. Detta går att arbeta med genom att t.ex. använda Cuisenairestavar[8]. Eleverna kan då t. ex. arbeta med färgerna på materialet som de sedan använder för att se likheter (gul = gul) och olikheter (gul ≠ rosa). Även detta innebär ett abstraktionssteg för eleverna då de här bortser från stavarnas längd.

2.8. Vardagliga sammanhang

Skolverket (2011) poängterar vikten av att matematikundervisningen bidrar till elevers kunskapsutveckling inom området. Det innebär bland annat att de ska kunna tillämpa matematiska kunskaper i vardagliga sammanhang. När elever kopplar matematik till vardagen gör de vanligen det vid situationer som enligt Neuman (1989) är kopplade till affärer. Men för att eleverna ska få möjlighet att skapa sig ett vidare perspektiv på när och var de har nytta av matematik bör lärare, enligt författaren, inleda lektioner med att på ett eller annat sätt beskriva detta. Genom att elever förstår varför vi behöver använda oss av matematik kan de också se meningen med den. Ett annat problem som emellertid uppstår när läraren väl försöker synliggöra matematikens koppling till vardagen är att abstraktionsnivån på lärarens sätt att

[8] Cuisenairestavar är ett materiel som består av tio stavar med olika längd från 1 cm till 10 cm. Varje längd har en speciell färg där tanken är att de ska symbolisera olika tal och hur de relateras till varandra.

vardagsanknyta matematiken ofta blir alldeles för hög. Detta bidrar till att eleverna får svårt att uppleva något samband mellan ”vardagsmatematik” och ”skolmatematik”. Löwing och Kilborn (2003) menar att det framförallt är yngre barn som på ett tydligt sätt behöver koppla beräkningar av olika slag till vardagliga sammanhang. För att kunna översätta en vardagssituation till ett skriftligt uttryck med matematiska symboler krävs det enligt McIntosh (2010) andra färdigheter än vid uppgifter som redan är uttryckta i symbolform. Författaren menar att undervisningen lägger för lite tid på att utveckla dessa färdigheter hos eleverna.

Ett sätt att synliggöra sambandet mellan ”vardagsmatematik” och ”skolmatematik” kan enligt Malmer (1984) vara att konstruera räknehändelser. Vidare anser hon att dessa ofta är förknippat med något som elever gör i lågstadiet men att det är något som borde användas lika mycket högre upp i åldrarna. Malmer (2002) anser även att räknehändelserna måste ta sin utgångspunkt i elevernas egna upplevda verklighet då hon ser att eleverna har ett behov av att knyta matematiken till sin egen erfarenhet. Ahlberg (2000) menar att elever som ritar, skriver och berättar har lättare att koppla sitt egna vardagliga språk till det matematiska språket.

2.9. Sammanfattning av litteraturgenomgången

Sammanfattningsvis behandlar litteraturgenomgången till övervägande del slutna utsagor medan vi i vår undersökning syftar till att synliggöra vilka strategier elever i årskurs två använder sig av då de löser öppna utsagor. Vi ser dock att det finns värdefulla anknytningar mellan denna litteraturgenomgång och vår undersökning. Detta då elever under sin skolgång ofta börjar med att lära sig hantera slutna utsagor för att sedan presenteras för öppna utsagor. Strategierna som eleverna då känner till är de strategier de använt vid slutna utsagor.

I en sammanställning (se bilaga 6) finns de i resultatet beskrivna strategier som även har synliggjorts i vår litteraturgenomgång. Marton och Booth (2000) har poängterat att det finns mycket forskning kring grundläggande aritmetik, vilket vi har synliggjort i denna litteraturgenomgång, då flera författare beskriver samma strategier. Syftet med vår studie var även att synliggöra vilka missuppfattningar som förekom i samband med att eleverna löste öppna utsagor. Litteraturgenomgången tar upp de vanligaste missuppfattningarna som förekommer när elever löser denna typ av uppgifter. Vi vill därav belysa om detta återspeglas i vårt resultat. Slutligen poängterar också tidigare forskning vikten av att läraren synliggör sambandet mellan ”skolmatematik” och ”vardagsmatematik”. Detta kommer i vår studie att visa sig genom hur eleverna kan relatera öppna utsagor till vardagliga sammanhang.

3. Teoretiskt ramverk

I uppsatsens syfte finns en underförstådd relation till ett teoretiskt ramverk då variation är en central aspekt i undersökningen. Därmed har vi genom våra forskningsfrågor, inspirerats av två teorier vilka är fenomenografin och hermeneutiken.

3.1. Fenomenografi

Inom vetenskapen studeras hur och varför verkligheten ser ut som den gör. Genom att studera detta intar forskaren ett så kallat första ordningens perspektiv. Fenomenografin lägger å andra sidan fokus på *variationen av sätt att erfara något* vilket innebär att forskaren intar ett andra ordningens perspektiv (Marton och Booth, 2000). På grundval av vårt forskningsfokus kommer vi, i vår studie, att inta det senare perspektivet. Alexandersson (1994) ser fenomenografin som icke-dualistisk då människa och värld är ett. Det är kontexten som individen befinner sig i och tidigare erfarenheter som enligt Williams (2006) avgör på vilket sätt människan erfar världen. Kunskap konstitueras, enligt fenomenografin, i relationen mellan individ och omvärld. Vidare uppfattas kunskap både som personlig och kollektiv där människans erfarande alltid återfinns i ett socialt sammanhang. Diskussionen kring elevernas variation av strategier kommer däremot att ligga på ett generellt plan, men det innebär inte att de avskiljs från sitt sammanhang i resultatredovisningen.

3.2. Hermeneutik

Vi valde att kombinera fenomenografin med hermeneutik för att lyfta fram en samverkan mellan förklaringar och beskrivningar då Patel och Davidsson (2011) menar att hermeneutik står för tolkningslära där man försöker förstå den mänskliga existensens grundbetingelser. Detta kan framförallt förstås genom språket, men också genom handlingar och livsyttringar vilka kan tolkas på samma sätt. Allwood och Eriksson (2010) påstår att språket, genom den ontologiska hermeneutikens uppfattning, ses som den primära medierande faktorn för kunskapsbildning. Inom hermeneutiken uppfattas, enligt Birkler (2008), forskarens förförståelse som ett viktigt redskap i tolkningen och förståelsen av forskningsobjektet. Allwood och Eriksson (2010) menar att hermeneutiken hjälper oss att se outtalade aspekter av vår kunskap och kunskapsbildning samt att rationalismen, som hermeneutiken grundas på, betonar vikten av subjektets roll för kunskapen om objektet. Därav är våra tolkningar mycket viktiga i analysförfarandet. Då vår förförståelse skiljer sig åt ger det texten olika betydelser (Allwood och Eriksson, 2010). I vårt arbete existerar dessa tolkningar sida vid sida.

4. Metod

För att genomföra undersökningen har vi valt ett tillvägagångssätt som kan ge oss en fördjupad kunskap om variationen av elevers strategier, missuppfattningar och hur de relaterar öppna utsagor till vardagliga sammanhang. Nedan kommer vi närmre att redogöra för den metodiska utformningen som tar sin utgångspunkt i en kvalitativt inriktad metod. Att även använda fenomenografin och hermeneutiken som metodologier blev här ett naturligt val.

4.1. Val av datainsamlingsmetod

Carlsson (1991) ser att en kvalitativ metod är bättre lämpad för vårt syfte än en kvantitativ metod då tyngdpunkten i en kvalitativ metod snarare ligger i att förstå än att förklara. För att få fram en variation av skilda sätt att uppfatta ett fenomen menar Marton och Booth (1997) att det krävs att datainsamlingsmetoden erbjuder en sådan möjlighet. Inom fenomenografin, som syftar till att vara ett verktyg för detta, är intervjuer en central metod. Eftersom förståelse bildas genom språket ser vi även genom hermeneutiken att intervjuer är den mest lämpade metoden för vår studie. I en intervju finns, enligt Hultén, Hultman och Eriksson (2007), ett stort svarsutrymme samt möjligheten att anpassa och förtydliga intervjufrågorna.

Vi har inspirerats av vad Kvale och Brinkmann (2009) beskriver som halvstrukturerade livsvärldsintervjuer. Vårt mål har varit att få beskrivningar som syftar till att förstå hur den intervjuades livsvärld inom ett visst område ser ut. Intervjuguiden (se bilaga 2) innehåller semistrukturerade frågor vilket enligt Patel och Davidsson (2011) innebär att vi utifrån specifika teman har använt fasta frågor som sedan kan följas upp. Anledningen till att vi har valt en semistrukturerad intervjuform är för att vi, precis som Kvale och Brinkmann (2009), ser att ostrukturerade intervjuer i det här fallet gör det svårare att kategorisera materialet. Helt strukturerade intervjuer gör det å andra sidan svårare att följa upp intressanta svar.

När vi utformade vår intervjuguide (se bilaga 2) gjorde vi detta enligt vad Carlsson (1991) kallar för trattprincipen. Han menar att en lämplig start kan vara att intervjuaren klargör syftet med intervjun för den intervjuade. Det är också lämpligt att här ställa några allmänna frågor kring elevens bakgrundsvariabler. I vår intervjuguide (se bilaga 2) rör det sig om namn och ålder. Dessa frågor fungerar som en ”mjukstart” för att eleverna ska känna sig bekväma i situationen och känna att de kan svara på frågorna. I samband med intervjuerna kommer vi också att använda observationer eftersom vi även vill upptäcka hur eleverna agerar med kroppen. Enligt Eliasson (2010) innebär observationer att observatören gör iakttagelser i eller av en miljö samtidigt som detta noteras. Patel och Davidsson (2011) konstaterar att om intervjupersonen säger en sak men handlar på ett annat sätt som strider mot det sagda kan observationen ge underlag för en rikare tolkning. Eleverna är inte alltid själva medvetna om vilket kroppsspråk de använder och vi vill genom observationer försöka ta reda på om elevernas förklaringar verkligen stämmer överens med hur de tänker. Det vi mestadels har fokuserat på under våra observationer är om och hur eleverna har använt hjälpmedel i sina uträkningar eller förklaringar vilket inte hade synliggjorts om vi endast fokuserat på samtalet under intervjun. Vi har använt oss av en ostrukturerad observationsform som enligt Patel och Davidsson (2011) innebär att vi på förhand inte kan kategorisera våra väntade svar. Istället måste vi registrera det observerade i form av nyckelord för att sedan, omgående efter observationstillfället, skriva ner en fullständig redogörelse just för att Eliasson (2010) poängterar vikten av att kunna gå tillbaka till dessa ursprungskällor.

4.2. Pilotstudie

Enligt Bell (2006) bör alla datainsamlingsinstrument utprovas innan datainsamlingen äger rum för att bland annat kontrollera frågornas funktionalitet. Patel och Davidsson (2011) menar att pilotstudien ska liknas vid den egentliga undersökningen fast i en mindre skala. Vår pilotstudie utfördes därför med en grupp som motsvarar vår egentliga undersökningsgrupp på de skolor där vi sedan genomförde själva undersökningen. Resultatet av vår pilotstudie visade att de tänkta frågorna gav varierande beskrivningar av olika strategier som eleverna använde, vilket medförde att vi behöll frågorna. Däremot såg vi ett behov av att ändra den öppna subtraktionsutsagan i det högre talområdet från 21-__=17 till 26-__=19. Detta på grund av att eleverna använde svaret de fick fram i den öppna additionsutsagan 17+__=21 till att lösa subtraktionsutsagan. Genom pilotstudien såg vi även att vi behövde lägga till ytterligare en fråga för att få in mer information kring elevernas uppfattning om likhetstecknets betydelse.

Förutom ovan nämnda ändringar gjorde vi ytterligare ett par små ändringar gällande temat om hur eleverna kunde relatera öppna utsagor till vardagliga sammanhang. I pilotstudien fick eleverna göra en räknehändelse med valfritt räknesätt, medan de i den riktiga undersökningen fick göra en räknehändelse för varje räknesätt. Anledningen till detta var att vi ville se om eleverna hade lättare för att vardagsanknyta något av räknesätten. Pilotstudien gav även tillfälle att öva på datainsamlingsteknikerna då Bell (2006) ser att forskaren behöver ha erfarenhet för att behärska teknikerna som ska tillämpas vid datainsamlingstillfället.

4.3. Urval

Alexandersson (1994) menar att urvalet i en kvalitativ studie måste ske med hänsyn till en godtagbar balanspunkt mellan kraven på variationsbredd samt ett hanterbart empiriskt underlag. I vår studie har vi gjort en avvägning mellan dessa principer. Marton och Booth

(2000) menar att vi, enligt fenomenografin, ska sträva efter att få fram en så stor variation som möjligt i elevernas val av strategier. Detta har vi haft i åtanke när vi av resursskäl gjort ett bekvämlighetsurval. Enligt Eliasson (2010) innebär detta urval att vi väljer ut lättillgängliga informanter. I enlighet med Alexandersson (1994) kan en heterogen grupp av elever öka variationsbredden i beskrivningarna. Vi såg därför till att få en jämn fördelning av pojkar och flickor med varierande kunskapsnivå från två olika skolor i västra Sverige.

Anledningen till att vi valde att genomföra undersökningen på skolor där vi redan känner eleverna var för att Doverborg och Pramling Samuelsson (2000) poängterar vikten av att eleverna känner till den som ska intervjua dem. I studien tillfrågades 45 elever i årskurs två med ett bortfall av två stycken som inte samtyckte med undersökningens villkor. Det fanns inget förutbestämt antal elever som skulle delta i undersökningen då denna datainsamling genomfördes tills vi nått informationsmässig mättnadseffekt vilket skedde efter 15 intervjuer.

4.4. Genomförande

För att få tillstånd att samla in information kring det undersökta började vi med att skicka ut ett mejl till respektive klasslärare där vi informerade om syftet med undersökningen samt hur den skulle gå till. Informations och samtyckesbrevet (se bilaga 1) delades ut i samband med att vi informerade eleverna om vår studie. Vid ett senare tillfälle när intervjuerna ägde rum blev eleverna tillfrågade ännu en gång om de ville vara med i undersökningen.

De utvalda eleverna fick därefter, en i taget, träffa en av oss i ett avskilt rum för att bli intervjuade under lektionstid. Intervjuerna spelades in på en diktafon. Under intervjun hade eleverna tillgång till papper, penna, suddgummi och klossar. Efter att vi informerat eleverna ännu en gång om syftet med undersökningen fick de svara på de tre första frågorna angående bakgrundsvariabler och deras inställning till matematik (se bilaga 2) för att sedan informeras om hur den resterande intervjun skulle gå till. Därefter behandlades en uppgift i taget. I samband med den första uppgiften 4+__=9 fick eleverna svara på fråga 1-6 (se bilaga 2). Eftersom vi förutsatte att vi inte skulle få ut något mer av att ställa fråga sex flera gånger ställdes denna fråga endast i samband med den första uppgiften i intervjun.

När vi gått igenom alla uppgifterna avslutades intervjun med de tre sista frågorna (se bilaga 2). Under intervjun förde vi även anteckningar om elevernas kroppsspråk som arkiverades tillsammans med det inspelade materialet samt elevernas egenproducerade räknehändelser. Intervjuerna varade i genomsnitt runt 20-25 minuter, men beroende på elevernas svar och vilka följdfrågor vi ställde förekom intervjuer som var både kortare och längre än genomsnittet. Insamlandet av data genomfördes i oktober/november 2011.

4.5. Forskningsetiska principer

I samband med förberedelserna för undersökningen tog vi hänsyn till fyra övergripande etikregler från Vetenskapsrådet (2002). Dessa är informationskravet, samtyckekravet, konfidentialitetskravet och nyttjandekravet. I vårt informations- och samtyckesbrev (se bilaga 1) framgår, enligt informationskravet, syftet med vår undersökning och hur den skulle gå till vilket eleverna även informerades om i samband med intervjun (se bilaga 2). Eftersom eleverna är under 15 år fick både de och vårdnadshavare lämna sitt samtycke i enlighet med samtyckeskravet. I enhällighet med detta krav framgår även att medverkan är frivillig och att uppgiftslämnaren enligt personuppgiftslagen (1998:204) när som helst har rätt att dra sig ur.

Genom informations- och samtyckesbrevet har vi även informerat de berörda om konfidentialitetskravet då det står att både skolan och eleverna behandlas konfidentiellt samt att endast vi har tagit del av det inspelade materialet som raderats när studien avslutats. Detta krav har även medfört att eleverna har avidentifierats i uppsatsen. Deltagarna i undersökningen har dessutom, i enlighet med nyttjandekravet, informerats om att den information de lämnar inte kommer användas annat än i forskningssyfte.

4.6. Val av analysmetod

Även de analysmetoder vi inspirerats av har sin grund i den fenomenografiska och hermeneutiska forskningsansatsen. För att synliggöra variationsbredden i elevernas svar anser Claesson (2007) att intervjuerna, enligt den fenomenografiska ansatsen, ska transkriberas och analyseras på ett sådant sätt att kvalitativa skillnader synliggörs. Vi finner även stöd för detta genom att Kvale och Brinkmann (2009) påstår att den hermeneutiska tolkningens syfte är att bilda en gemensam förståelse av en text, vilket i vår studie därmed utgörs av transkriberingar. Datainsamlingen och analysen är enligt Marton och Booth (2000) oskiljaktiga i en fenomenografisk studie och Alexandersson (1994) ser även, utifrån ett hermeneutiskt perspektiv, att tolkningen i analysen redan finns med vid datainsamlingstillfället.

Analys- och tolkningsarbetet som delats in i fyra faser enligt den fenomenografiska ansatsen har syftat till att uppmärksamma hur individernas erfarenheter kan relateras till varandra. Den första fasen handlar enligt Alexandersson (1994) om att få ett helhetsintryck av materialet. Därför läste vi igenom transkriberingarna upprepade gånger för att få förståelse för deras innebörd. Andra fasen handlar om att se likheter och skillnader i elevernas svar. Genom att vi kontrasterade intervjuutsagorna mot varandra kunde vi sedan urskilja ett mönster vilket enligt Patel och Davidsson (2011) motsvarar ett induktivt arbetssätt. För att synliggöra delarnas relation till varandra och till helheten har vi enligt den tredje fasen, som handlar om att kategorisera uppfattningar, analyserat vårt material upprepade gånger. I inledningsskedet av analysen konstruerade vi två tabeller, en för additionsuppgifterna och en för subtraktionsuppgifterna, där vi kategoriserade de strategier eleverna valt att använda. I dessa gjorde vi även kortfattade beskrivningar om hur eleverna använde strategierna. Tabellerna har varit utgångspunkten för de beskrivningskategorier som återfinns i resultatet. Sista fasen innebär enligt Alexandersson (1994) en mer systematisk analys om vilket förhållande uppfattningarna har till varandra för att studera den underliggande strukturen i våra kategorier.

Tolkningarna av elevernas utsagor syftar till att överföra den *mening* vi funnit i vår analys. Dessa tolkningar har vi gjort enligt *den hermeneutiska cirkeln* vilket enligt Kvale och Brinkmann (2009) är ett centralt begrepp inom hermeneutiken som visar på förståelsens progression. Forskaren bör då i tolkningsprocessen pendla mellan delar i texten och texten som helhet. Patel och Davidsson (2011) redogör för det cirkulära förhållandet i spiralen där tolkning av texten leder till förståelse och ny textproduktion. Därefter görs en ny tolkning med en ny förståelse och så vidare för att sedan fortsätta i en cirkulär rörelse tills vi uppnått vad Kvale och Brinkmann (2009) kallar för *god gestalt.*

4.7. Kritisk granskning av metoden

Beroende på vilken forskartradition vi har valt behandlas studiens trovärdighet och tillförlitlighet på olika sätt. I en fenomenografisk studie beror undersökningens trovärdighet, enligt Alexandersson (1994), på i vilken utsträckning våra beskrivningskategorier representerar elevernas uppfattningar eller är en efterkonstruktion av forskaren. De utfall som fenomenografiska studier ger kan enligt författaren betraktas som ”upptäckter”. För att öka tillförlitligheten i vår studie har vi låtit utomstående identifiera dessa ”upptäckter” då de har läst och kontrollerat att våra kategorier stämmer överens med utsagor i intervjuerna.

Vidare ser Denscombe (2004) att värdet av undersökningens resultat är beroende av detaljeringsgraden och precisionen i datainsamlingen. Genom att vi har spelat in intervjuerna på en diktafon har den intervjuades svar sparats. Dock ser Hultén m.fl. (2007) att en sådan registrering kan påverka intervjupersonernas svar då de kan bli mer försiktiga i sina uttalanden. Detta eftersom samtalet då, enligt Patel och Davidsson (2011), kan få en mer formell karaktär. Dock ser vi, i detta fall, att fördelarna med att använda diktafon väger över nackdelarna då trovärdigheten enligt Alexandersson (1994) kan öka genom att forskaren i resultatet strävar efter en bra balans mellan citat från intervjupersonerna och egna tolkningar. Detta har vi haft i åtanke när vi formulerat vårt resultat där beskrivnings kategorierna syftar till att spegla elevernas uppfattningar. Enligt Eliasson (2010) kan även intervjuns struktureringsgrad ha betydelse för vilken inverkan intervjuarens skicklighet har på resultatet. Eftersom vi har använt semistrukturerade intervjuer har det krävt mer av oss än vid strukturerade intervjuer vilket således har inneburit en ökad risk för intervjuareffekten då samspelet mellan intervjuaren och den intervjuade kan ha påverkat resultatet på ett negativt sätt. Detta är något som vi haft i åtanke då elever enligt Doverborg och Pramling Samuelsson (2000) gärna vill ge korrekta svar. Elevens dagsform kan också inverkat på resultatet.

Enligt Doverborg och Pramling Samuelsson (2000) är det viktigt att bygga upp en rapport med den som intervjuas. I synnerhet om intervjupersonerna utgörs av elever eftersom de kan få svårt att förklara hur de tänker om de blir nervösa. Dock finns en nackdel med att sedan tidigare varit bekant med eleven då vi redan innan undersökningen hade bildat subjektiva uppfattningar om objektet. Det har därför funnits en risk att den tolkade informationen färgats av tidigare upplevelser. På grund av detta ser Patel och Davidsson (2011) att tillförlitligheten hade stärkts genom att ytterligare en person närvarat under intervjutillfället. Doverborg och Pramling Samuelsson (2000) ser däremot att det hade kunnat påverka elevernas svar negativt.

I studien kombinerade vi även intervjuerna med observationer. Detta kallar Denscombe (2004) för metodtriangulering vilket också kan vara ett sätt att stärka trovärdigheten eftersom det har gett oss möjligheter att jämföra två olika empiriska material där resultatet antingen kan ifrågasättas eller bekräftas. Då vi är två stycken som samlat in data på två olika ställen kan en variation mellan dessa material enligt Patel och Davidsson (2011) bidra till att berika studien. Denscombe (2004) poängterar även vikten av att forskaren har sett till att resultatet inte förvrängts av datainsamlingsmetoderna vilket innebär att frågorna i vår intervjuguide (se bilaga 2) bör vara konstruerade utifrån vårt syfte och formulerade på ett neutralt sätt.

Vi är också medvetna om vilken inverkan induktionsproblemet har på vår undersökning då vi trots upplevd mättnadseffekt inte kan garantera att vi inte skulle upptäckt fler strategier om vi intervjuat fler elever (Birkler, 2008). Vi vill också poängtera att vi i vår studie inte är ute efter att generalisera vårt resultat eftersom vi har valt att koncentrera studien på ett fåtal elever vilket möjliggör ett större djup i vår forskning. Denscombe (2004) ser att ett sådant val, av resursskäl, är på bekostnad av undersökningsbredden då vårt resultat i statistisk bemärkelse inte är representativt för hela ”populationen”. I vår studie förekom även ett externt bortfall då två elever inte medgav sitt samtycke. Detta hade dock inte garanterat att de kommit med i studien. Trots det kan bortfallet ses mot bakgrund av att dessa elever, enligt Stukát (2005), kan skilja sig mot resten av undersökningsgruppen i något viktigt avseende. Ofta beror detta på en negativ inställning till vad som undersöks vilket kunde haft betydelse för vårt resultat.

5. Analys och resultat

Vår uppsats syftar till att synliggöra vilka strategier elever i årskurs två använder sig av när de löser öppna utsagor samt vilka missuppfattningar som förekommer i samband med detta. En kort beskrivning av strategierna som eleverna har använt sig av finns i bilaga 6. I vår analys kunde vi se likheter och skillnader i elevernas svar som vi, enligt fenomenografin, delade in i olika beskrivningskategorier om vilka strategier eleverna använder vid de olika uppgifterna. Uppsatsen syftar även till att belysa hur eleverna kan relatera denna typ av uppgifter till vardagliga sammanhang vilket också är något som framgår i vårt resultat.

5.1. Strategier som används vid uppgiften 4+__=9

För att lösa den öppna utsagan 4+__=9 förekom samtliga additionsstrategier som finns representerade i tabell 1 (se bilaga 3) förutom strategin *räkna från första*. Dock förekommer en stor skillnad gällande hur många elever som använder sig av respektive strategi då fyra strategier endast används av någon elev medan övriga används av flera.

5.1.1. Räkna ental i tre steg

Filip använder strategin *räkna ental i tre steg* genom att först räkna upp fyra fingrar på ena handen och sedan räkna upp ett finger i taget på andra handen tills han kommer till nio. När han har tagit upp nio fingrar räknar han upp alla fingrar igen. I samband med denna strategi använder han sig även av *ett till ett-principen* då han låter varje finger representera ett tal.

5.1.2. Omgestaltning av tal

Kajsa är den enda eleven som har använt sig av strategin *omgestaltning av tal* i samband med uppgiften 4+__=9. Hon har då delat upp talet tio i delarna fyra och sex vilket uttrycks som 4+6=10. Kajsa får sedan fram rätt svar genom att ta bort ett på varje sida om likhetstecknet.

5.1.3. Systematisk prövning

Den strategi som Nova använder sig av är *systematisk prövning*. Hon utgår då från fyra som helhet. Därefter prövar hon sig fram till svaret genom att systematiskt lägga till ett. Hon börjar med att lägga till ett till fyra och frågar sig om det blir nio, men det blir bara fem. Då lägger hon till ett till fem och frågar sig om det blir nio, men det blir bara sex, och så fortsätter hon till det att hon kommer till nio. Svaret får hon fram genom att hålla upp ett finger för varje tal.

5.1.4. Gruppera fingrarna och se strukturer

Nelly *grupperar fingrarna och ser strukturerna* fyra och fem. Hon gör ingen uppräkning utan ser direkt talens del-helhets-relation då 4+5=9.

5.2. Strategier som används vid uppgiften 4+__=9 och 17+__=21

Följande strategier har använts på något varierande sätt vid de öppna additionsutsagorna 4+__=9 och 17+__=21. Tabell 1 (se bilaga 3) visar att endast ett fåtal elever använder sig av samma strategi i båda additionsutsagorna.

5.2.1. Räkna ental i två steg

Pelle använder strategin *räkna ental i två steg* i båda uppgifterna. Dock använder han klossar som får representera varje tal vilket också är i enlighet med *ett till ett-principen*. Vid uppgiften 4+__=9 tar han fram fyra klossar. Sedan plockar han fram fem klossar till samtidigt som han räknar. I uppgiften 17+__=21 gör han på samma sätt, men med fler antal klossar.

5.2.2. Inlärda talfakta

Några av eleverna använder sig av *inlärda talfakta* i antingen den första eller andra additionsutsagan. Förklaringar som ofta förekom i samband med en sådan här uträkning var att de kunde räkna ut talet i huvudet om de hade sett talet många gånger tidigare.

> **Teo:** /…/ om man har sett talet många gånger kan man bara räkna ut det.

5.2.3. Omgestaltning av ”dubblor”

I uträknandet av 4+__=9 använde sig de flesta eleverna av strategin *omgestaltning av ”dubblor”*. Dessa dubblor utgjordes mestadels av 5+5 =10 där eleverna sedan minskade med ett på båda sidorna. Flera av de andra eleverna använde sig utav dubblorna 4+4=8 för att sedan lägga till ett på båda sidor. Eleverna förklarade detta på lite olika sätt.

> **Max:** (skriver 5) ah jag tänkte så här att 4 plus 4 är 8 plus 1, då är det ju plus 1 i 4 och då är det ju 5 och så är det ju plus 1 i 8 då och då är det ju 9.

Nils var den enda som använde sig av båda dubblorna medan Nova var den som skilde sig åt mest i sin förklaring vid tillämpningen av dubblan 5+5=10. Nedan följer hennes förklaring:

> **Nova:** det e ju nästan 10 (pekar på nian) så kan man säg att det e 10 och hälften av 10 e 5 och så är det ju 9 där (pekar på summan), det är ju ett mindre än 10, så tar jag bort 1 från 5, då blir det ju 4 och sen är det ju 5 där (pekar på den öppna utsagan i uppgiften).

5.2.4. Talkamrater och uppdelning av tal

Den enda eleven som tar upp strategin om *talkamrater och uppdelning av tal* i samband med uppgiften 4+__=9 är Noelia då hon talar om niokamrater och tiokamrater. Hon menar att om hon vet att fem är fyrans niokamrat, vet hon också därigenom vad det ska stå på strecket i uppgiften. Dock ser hon även att hon kan använda tiokamrater och ger exemplet 4+6=10. Hon tar sedan, precis som Kajsa gör i den ovan nämnda strategin *omgestaltning av ”dubblor”*, bort ett på varje sida om likhetstecknet. I den andra uppgiften 17+__=21 används två varianter av strategin *talkamrater och uppdelning av tal*. Dock varierar tillämpningen av strategin från elev till elev men grundprincipen är i stort sett samma. Tillämpningen som användes mest var den där eleverna såg hur mycket som fattades mellan 17 och 20. Därefter såg de hur mycket som fattades mellan 20 och 21. I det sista steget adderades båda talen som de fick fram. Summan redovisade de sedan som svaret på uppgiften. Sammanfattningsvis såg uträkningen ut som följande: 17+3=20; 20+1=21; 3+1=4. Nils var den enda som skilde sig lite från de andra då han tillämpade *ett till ett-principen* genom att räkna ut skillnaden på fingrarna.

Den andra tillämpningen av strategin, som också förekom i stor utsträckning, är i grunden lik den precis ovan nämnda. Hos några elever kunde dock båda tillämpningarna av strategin förekomma. Elevernas förklaringar skiljer sig lite åt, men principen är densamma. Istället för att se hur många som saknas mellan 17 och 20 ser eleverna hur många som saknas mellan 7 och 10. Därefter adderar de 1 till 10 vilket ger 11. Detta ser de som synonym till 20+1=21. I nästa steg adderar de skillnaderna de fick fram mellan talen vilket ger svaret på uppgiften.

5.2.5. Addition är inversen till subtraktion

Ett par av eleverna löser uppgiften 4+__=9 genom att göra om den till en subtraktionsuppgift. Däremot behåller de formen av en öppen utsaga då de menar att 9-__=4. Lösningsförslagen av uppgiften 17+__=21 varierade mer. Leja räknade t. ex baklänges från 21 till 17 och menade att detta var samma sak som subtraktion. Dock hade hon svårt att utföra beräkningen på egen hand. Max föreslog å andra sidan lösningen 21-__=17 vilket är samma princip som eleverna använder i uppgiften 4+__=9 medan Nelly och Nova tog upp att uppgiften kunde lösas genom att 21-17=__. Denna senare princip var det däremot ingen som tog upp i samband med uppgiften 4+__=9. Nova var den enda som använde sig av subtraktion i båda uppgifterna och ett ytterligare förslag från hennes sida var att använda en kombination av strategin *addition är inversen till subtraktion* och strategin *talkamrater och uppdelning av tal*. Hon menade att om hon utgick från 21, kunde hon sedan se hur många som behövdes tas bort för att hon skulle få 20. Därefter kunde hon se hur många hon behövde ta bort från 20 för att få 17. Slutligen adderade hon de tal som hon tog bort vilka var tre och ett. Summan av termerna framställde hon sedan som svaret på uppgiften. Sammanfattningsvis ser uträkningen ut som följande: 21-1=20; 20-17=3; 3+1=4.

5.2.6. Missuppfattningar

En missuppfattning som Daniel har i samband med uppgiften 4+__=9 är att term och summa ska adderas. Daniel börjar på summan (nio) och använder då strategin *räkna från största* när han adderar termen (fyra) till summan. Detta gör han med hjälp av fingrarna.

> **Daniel:** först tar jag 9, och sen räknar man 1, 2, 3, 4, och då blir det 13 fingrar.

Då det gäller den andra uppgiften 17+__=21, i ett lite högre talområde, var Kajsa den enda av eleverna som inte hade något lösningsförslag. Varför hon inte har det vet vi inte, men av hennes svar att döma, kan det vara så att hon inte har räknat sådana här typer av uppgifter inom detta talområde tidigare. Då eleven inte ens gör något försök till att lösa uppgiften, kan det tolkas som att hon endast har proceduell kunskap[9] inom ett lägre talområde.

5.2.6.1. Väljer ordning i addition

Teo som kunde lösa den första uppgiften 4+__=9 fick problem när han skulle lösa 17+__=21 då han adderade den synliga termen med summan genom att först addera tiotalen, 1+2=3, och sedan addera entalen, 7+1=8. Genom att därefter sätta summan av tiotalen och summan av entalen bredvid varandra, fick han fram att svaret skulle vara 38.

5.3. Strategier som används vid uppgiften 17+__=21

Strategin *räkna från första* var den enda av strategierna som enbart användes i samband med att eleverna löste den öppna additionsutsagan 17+__=21. Eleverna som använt denna strategi har däremot gjort det på två olika sätt.

5.3.1. Räkna från första

De två elever som använt sig av strategin *räkna från första* i uppgiften 17+__=21 visar att de behärskar strategin både med och utan *ett till ett-principen* då de använder fingrarna som hjälpmedel. Eleverna gör här en uppåträkning från den synliga termen till summan. Skillnaden däremellan anger svaret på uppgiften.

5.4. Strategier som används vid uppgiften 9-__=3

Tabell 2 (bilaga 4) visar att de tre vanligaste strategierna inom slutna utsagor endast används av ett fåtal elever vid öppna utsagor. De som använder dem gör det i just uppgiften 9-__=3.

[9] Med proceduell kunskap avses ensidig matematisk träning.

5.4.1. Ta bort

Strategin *ta bort* innebär att eleven, i detta fall Teo, vid uppgiften 9-__=3 räknar upp grundmängden nio för att sedan räkna bort delmängden tre. Därefter räknar han hur många de är kvar i differensmängden. Teo väljer även att kombinera denna strategi med *talgestalter* då han ser talet nio i form av ett tärningsmönster. Ur denna visuella bild tar han sedan bort talgestalten för tre vilket gör att han kan se talgestalten för differensmängden, sex.

5.4.2. Lägga till/ komplettera

Nelly beskriver strategin *lägga till/ komplettera* genom att i uppgiften 9-__=3 fylla ut delmängden tills den blir lika stor som grundmängden. Därefter kontrollerar hon hur många hon har lagt till genom att kontrollräkna antalet. Upptill denna strategi använder hon *ett till ett-principen* genom att under uppräkningen till grundmängden höja ett finger för varje tal.

5.4.3. Jämförelse

Nova använder sig av strategin *jämförelse* och visar sin uträkning med klossar. Hon lägger då upp nio klossar på en rad och tre på raden under. Därefter ser hon att det fattas sex klossar.

> **Nova:** /…/ om man använder klossar och lägger upp 9 och 3, då e det ju 6 som fattas där då vet man ju att det ska bli 6.

5.4.4. Kompensationsstrategin

För att komma fram till svaret på uppgiften 9-__=3 berättar Nils att han, genom *kompensationsstrategin*, först tänker på niokompisarna 4+5. Därefter flyttar han två från fem som han lägger till fyra. Detta visar att han har förståelse för att subtraktion är inversen till addition eftersom han väljer att använda kompensationsstrategin genom en additionsuppgift.

> **Nils:** om man kanske vet att 4+5=9 så kan man chansa att ändra tills man får rätt.
> **Intervjuare:** kan du visa?
> **Nils:** mm man ser att man måste ha till 2 på 4 för det ska vara 6… mm då tar jag det från 5.

5.4.5. Upprepad addition

Eleverna som använder strategin *upprepad addition* i samband med uppgiften 9-__=3 ser talet nio som upprepad addition av talet tre. För att komma fram till lösningen tar Filip bort en av de tre treorna för att sedan addera de två som återstår.

> **Filip:** /…/ 9 minus, om man vet då att de e 3 stycken treor i den, då kan man ta minus 3 från 9, då tar man ju bort 1 från dom och så räknar man ihop 3+3 bara /…/ ah då e det ju 6.

Kajsa använder även hon en form av *upprepad addition*. Skillnaden jämfört med Filips tillvägagångssätt är att hon går från andra hållet genom att tänka att hon behåller en av de tre treorna. Därefter ser hon att hon ska ta bort sex eftersom detta är summan av det som kvarstår.

5.4.6. Systematisk prövning

I uppgiften 9-__=3 är Nova den enda som väljer att använda strategin *systematisk prövning*. Hon utgår då från tre för att sedan pröva sig fram till svaret genom att systematiskt lägga till ett: 3+1; 4+1; 5+1; 6+1; 7+1; 8+1. Upp till detta använder hon sig av *ett till ett-principen* när hon höjer ett finger för varje tal för att hålla koll på uppräkningen.

> **Nova:** /…/ man kan ta 3 plus någonting plus 1 är 4, 4+1= 5, 5+1=6 … öhm… ah man kan ta så till man kommer från 3 så tar man 4,5,6,7,8,9 för då har man ju tagit upp 6 fingrar när man räknat ända upp till 9 då vet man att 6 ska stå där.

5.5. Strategier som används vid uppgiften 26-__=19

Alla elever klarade inte av att lösa den öppna additionsutsagan 26-__=19 och i tabell 2 (se bilaga 4) synliggörs att det inte förekom någon strategi som endast användes vid denna uppgift. Eleverna som klarade av att lösa denna utsaga gjorde det med strategier som även användes i uppgiften 9-__=3 vilket medför att vi också här kommer att presentera dessa.

5.5.1. Inversen till addition

Flera elever använder strategin *inversen till addition* för att lösa 9-__=3. Eleverna konstruerade då om uppgiften till en sluten additionsutaga vilket ger 6+3= 9 eller 3+6=9. Strategin kombinerades även med *inlärda talfakta* då eleverna kan utföra beräkningen direkt.

Nova är en av de elever som vid uppgiften 26-__=19 kombinerat *inversen till addition* tillsammans med additionsstrategin *omgestaltning av tal*. Detta gör hon genom att först räkna 19+1=20. Därefter räknar hon 20+6=26 för att slutligen lägga ihop 1+6 vilket ger svaret sju.

5.5.2. Nedåträkning till delen

Det förekommer två varianter av strategin *nedåträkning till delen* bland eleverna. Det som skiljer elevernas tillvägagångssätt åt är hur de kontrollerar sin nedåträkning. Nelly gör detta med *ett till ett-principen* genom att röra sin kind med ett finger i taget. Hon kollar därefter på sina fingrar och svarar att det blir sju. I uppgiften 26-__=19 använder Pelle en annan variant av denna strategi. Han väljer då att lägga fram 26 stycken klossar för att sedan plocka bort klossar tills det bara är 19 stycken kvar. Därefter ser han hur många han tagit bort. I uppgiften 9-__=3 kombinerar Nova *nedåträkning till delen* med att göra en nedåträkning med flera subtraktionsberäkningar där hon tydligt visar att hon tar bort ett från varje tal utan att räkna på fingrarna. När hon har räknat ner från nio till tre ser hon att det är sex steg däremellan.

Nova: /…/ man tar bort 1 från 9, det är 8 och 1 från 8 e 7 och 1 från 7 e 6 och 1 från 6 e 5 och 1 från 5 e 4 och 1 från 4 e 3.

5.5.2.1. Missuppfattning av nedåträkning till delen

Vid uppgiften 26-__=19 använder sig Allie och Leja av *nedåträkning till delen* med hjälp av fingrarna. De börjar räkna på 26 och räknar sedan nedåt till 19. Detta medför att de får en för mycket när de håller upp sina fingrar. Allie förstår att hon har fällt upp ett finger för mycket och tar därefter bort ett eftersom hon vet att det ska bli sju. Det gör däremot inte Leja.

5.5.3. Uppräkning från delen

Det är endast Leja som har använt strategin *uppräkning från delen* i båda subtraktionsutsagorna. Delen utgörs i detta fall av differensen i båda uppgifterna. Vid uppgiften 9-__=3 använder Leja till viss del fingrarna, vilket hon inte gör i 26-__=19.

Nils kombinerar denna strategi med *ett till ett-principen* då han efter att ha gjort uppräkningen på fingrarna direkt ser antalet utan att kontrollräkna dem. Vad vi kan se kontrollräknar inte heller Kajsa antalet steg efter uppräkningen i uppgiften 9-__=3.

5.5.4. Relatera andra räkna bort uppgifter

I uppgiften 9-__=3 är Allie en av de elever som använder strategin *relatera andra räkna bort uppgifter*. Hon relaterar uppgiften till 8-3 som hon vet är fem. Hon menar då att hon måste lägga ett till åtta för att hon ska få 9-3. Därmed kan hon se att uppgiften med den öppna utsagan kan göras om till en sluten utsaga. I uppgiften 26-__=19 använder Nils och Pelle denna strategi men de skiljer sig dock lite åt från varandra.

Nils: 26 minus 6 är lika med 20 och sen 1 till /…/ 7

Pelle: 26 minus 20 är 6 och eftersom det var 19 så la jag på 1 och då blev det 7.

Fia skiljer sig från de andra då hon löser uppgiften i ett lägre talområde genom att ta bort tio från talen i uppgiften vilket leder till att hon istället får 16 och 9. Hon får sedan genom *uppåträkning från delen* fram svaret sju. Därefter adderar hon tiotalen till uppgiften igen.

Fia: /…/ jag börjar på 9 och lägger på 7 så blir det 16. Sen la jag på 10 till 26 och minus 7.

5.5.5. Inlärd talfakta

Inlärd talfakta är en vanlig strategi bland eleverna. I samband med strategin svarar de att de bara vet eller att det är ett tal som de räknat flera gånger och därför känner igen.

5.5.6. Väljer ordning i subtraktion

Teo gjorde en korrekt lösning av uppgiften 9-__=3, men när han skulle lösa 26-__=19 gjorde han på ett annat sätt vilket medförde att resultatet blev felaktigt. Det han gjorde var att han beräknade tiotalen och entalen för sig vilket innebar att han tog 2-1 och 6-9. Därefter tog han differensen från tiotalen samt entalen och satte bredvid varandra vilket gav svaret 13. Detta visar att Teo inte har kännedom om negativa tal då han antar att den kommutativa lagen även gäller vid subtraktion eftersom han tror att differensen av 6-9 är samma vid 9-6.

5.6. Likhetstecknet

När vi till eleverna ställde frågan om vad likhetstecknet betyder svarade de flesta antingen att något *blir* eller att något *är*. Men under vår analys av transkriberingarna såg vi att samtliga elever använde båda varianterna när de löst uppgifterna under intervjun. Kanske kan detta bero på att eleverna är vana vid att säga *är* lika med och att svaret *blir* något, vilket har medfört att de inte är konsekventa i sitt val av ord. Två elever avviker från övriga elever gällande vad likhetstecknet betyder då de på frågan svarar att *här kommer svaret.* Men även bland dessa elever kan vi i transkriberingarna se att de använder sig av både *är* och *blir*. I stort sett alla elever svarade att det måste vara lika mycket på båda sidor om likhetstecknet. En del elever beskrev även likhetstecknet som en balansvåg som ska väga lika mycket på båda sidor om axeln. Någon elev ser likhetstecknet som ett gap åt både höger- och vänsterled. Detta för att hans lärare poängterat för honom att det är lika mycket på båda sidor om likhetstecknet.

> **Max:** om där står 4 plus 5 så står det är lika med, och då menar dom att det är svaret, alltså att svaret går dit (pekar till höger). Lena har sagt så här, att gapet är mot båda för att båda är störst.

På frågan om likhetstecknet kan komma före plustecknet förekom delade meningar bland eleverna. En del sa att det kunde göra det medan andra ansåg att detta inte var möjligt. En av de elever som ansåg att likhetstecknet kunde komma före plustecknet såg att uppgiften 4+__=9 kunde vändas till 9=__+4. En annan elev som också menade att det kunde vara på detta sätt trodde att detta endast tillämpades i matematik som räknas på högstadiet. Vi ser att närmre hälften av eleverna har god kännedom om likhetstecknets olika betydelser.

5.7. Vardagliga sammanhang

I intervjun ställde vi frågan till eleverna om när det kan vara bra att lösa öppna utsagor. Av elevernas svar framgick att flertalet av dem inte såg hur de skulle koppla denna typ av uppgifter till vardagliga sammanhang. Några elever påstod att uppgifterna kunde användas i affären. Dock kunde de inte precisera på vilket sätt. Leja var en av de elever som visste att öppna utsagor kunde nyttjas i affären då hon menade att de kunde användas för att inte bli lurad av kassörskan genom att få fel summa pengar tillbaka. Vidare tog hon även upp att uppgifterna kunde användas när hon ska sälja majblommor. Om en majblomma kostar 10 kronor och den som köper den ger dig 20 kronor måste vi kunna räkna ut hur mycket köparen ska ha tillbaka. Vi tolkar Lejas beskrivning som att hon förmodligen vet att hon kan räkna ut detta genom en öppen utsaga men det skulle även kunna vara så att hon räknar ut det genom en sluten utsaga då 20-10=10. Vi ser också att de elever som säger att öppna utsagor kan användas i affären, men inte kan precisera på vilket sätt, vet att matematik ofta kopplas dit. Elsa tar också upp dukning som exempel vid utsagan 9-__=3 där hon förklarar enligt följande:

Elsa: vi säger att vi ska duka till 9 och om vi bara dukar till 3 så har vi 6 kvar.

Flera förklaringar på när öppna utsagor kan användas framkom. Dock tolkar vi elevernas svar som mer generella anledningar till varför vi ska kunna matematik då de inte kopplar dessa specifikt till öppna utsagor. Detta eftersom de troligen inte kan avgöra i vilket sammanhang öppna utsagor används i vardagen. Eleverna menade att uppgifterna bland annat kunde användas på jobbet, för att klara prov och uppgifter i matteboken samt för att bli smartare.

5.7.1. Räknehändelser

Den övervägande delen av eleverna har konstruerat räknehändelser till slutna utsagor trots att de fått i uppgift att utgå ifrån öppna utsagor. När eleverna exempelvis har utgått från uppgiften 4+__=9, räknade de först ut den för att sedan göra räknehändelsen. Detta har medfört att de istället har gjort en räknehändelse till uppgiften 4+5=__. Allie är den enda eleven som har gjort en räknehändelse till en öppen subtraktionsutsaga (se bilaga 5), men vi är osäkra på om hon har gjort detta med flit då hon gör en räknehändelse med sluten utsaga till additionsuppgiften. Även Filip har gjort en additionsräknehändelse med sluten utsaga. Dock förklarar han uppgiften 6-__=3 som en öppen utsaga enligt transkriberingen nedan.

Filip: ah, 6 stenar /…/ och så ska dom bli 3…

Här visar Filip att han vet att något ska tas bort från sex för att det sedan ska bli tre kvar. Vid följdfrågor svarar dock Filip att han räknar ut den öppna utsagan som en sluten utsaga. Ett flertal av eleverna har vid deras konstruktion av räknehändelser gjort som Max då de först löst den öppna utsagan innan de gjorde räknehändelsen. Detta resulterade i att deras räknehändelser konstruerades utifrån slutna utsagor. Max är även en av de elever som använder Millton och Polly, figurer ur matematikboken, som karaktärer i sin räknehändelse (se bilaga 5). Övriga elever kopplade mestadels sina räknehändelser till bollar, blommor och karameller vilket vi ser bero på att de är lättmålade ting som ofta förekommer i undervisningssammanhang. Detta kan även vara en anledning till att Nils valde att ta sina räknehändelser muntligt eftersom han valde figurer som traktorer och älgar. När vi analyserat elevernas räknehändelser har vi sett att de har haft lättare för att göra räknehändelser till öppna subtraktionsutsagor än öppna additionsutsagor. Detta ser vi då Allie och delvis även Max gör en räknehändelse till den öppna subtraktionsutsagan medan räknehändelsen till additionsuppgiften blir till en sluten utsaga.

5.8. Sammanfattning av analys och resultat

Vårt syfte med uppsatsen har varit att synliggöra vilka strategier elever i årskurs två använder sig av när de löser öppna utsagor samt vilka missuppfattningar som förekommer i samband med detta. Vi kan genom vår undersökning se att variationen av strategier är stor inom både addition och subtraktion. Ett tydligt resultat är att de vanligaste strategierna i de öppna subtraktionsutsagorna skiljer sig från de strategier som andra forskare menar är vanligast vid slutna subtraktionsutsagor. Missuppfattningarna visade sig även vara fler inom subtraktion och de flesta av dem kunde kopplas till strategin *nedåträkning till delen*. Vidare har uppsatsen syftat till att belysa hur eleverna kan relatera öppna utsagor till vardagliga sammanhang. Resultatet i stort visar på att eleverna har mycket svårt för detta men att de har något lättare för att knyta an de öppna subtraktionsutsagorna till vardagliga sammanhang.

6. Diskussion

Vår studie har syftat till att synliggöra vilka strategier elever i årskurs två använder sig av när de löser öppna utsagor samt vilka missuppfattningar som förekommer i samband med detta. Dessutom har uppsatsen syftat till att belysa hur eleverna kan relatera denna typ av uppgifter till vardagliga sammanhang. Genom vår analys har vi fått syn på en bred variation av strategier vilka har utgjort de olika beskrivningskategorierna i vårt resultat. Därigenom kan vi också konstatera att de missuppfattningar som förekom i samband med att eleverna löste uppgifterna till viss del var relaterade till den strategi eleverna valt att använda. Av resultatet framgår också vilka svårigheter som dyker upp i samband med att eleverna relaterar öppna utsagor till vardagliga sammanhang. Vidare vill vi poängtera att metoden för undersökningen har fungerat väl och att vi inte har haft för avsikt att göra några generaliseringar då vi strävar efter djup snarare än bredd. Det innebär att vårt resultat inte är representativt för alla elever i årskurs två. Resultatet visar ändock på viktiga poänger som bör lyftas fram.

6.1. Strategier

När eleverna, under intervjutillfället, fick redogöra för vilka strategier de använde i samband med att de löste uppgifterna kom de flesta av dem på mer än en strategi. Mot bakgrund av detta ställer vi oss frågan om eleverna till fullo behärskar alla strategier de har redogjort för eftersom de kan använda lösningen från deras förstnämnda lösningsstrategi till att förklara de övriga strategierna som de menar kan användas. Detta synliggörs i Allies sätt att lösa en uppgift då hon genom den första strategin visste att svaret skulle bli sju. När hon sedan redogör för ytterligare en strategi använder hon den som Kilborn (1989) benämner *nedåträkning till delen.* Därigenom fick hon ett annat svar som hon sedan väljer att korrigera genom att lägga till ett led i uträkningen så att svaret blev detsamma som vid den första.

Genom vårt resultat kunde vi se att eleverna kombinerade några av strategierna. Strategin som mest frekvent kombinerades med andra var, den som Kilborn (1989) kallar för, *ett till ett-principen* då eleverna räknade med hjälp av fingrar eller klossar. En ytterligare strategi som kombinerades med en annan var den Malmer (2002) kallar för *talgestalter* då den kombinerades med strategin som Kilborn (1989) och Johansson (2011) benämner *ta bort*.

Det är viktigt att eleverna lär sig räkna ut differensen med generaliserbara strategier som även kan tillämpas i högre talområden (Kilborn, 1989). Resultatet visar att eleverna har kommit olika långt i sin matematiska utveckling. När vi sammanställde vårt resultat i tabellerna (se bilaga 3 och 4) kunde vi se att ett stort antal elever valde att använda liknande strategier, medan ett fåtal använde strategier som de var ensamma om. Vi ser att elevernas val av strategi inte är beroende av vilken skola de går på eftersom många har valt att använda liknande strategier. Strategin som Ahlberg (1995) kallar för *omgestaltning av ”dubblor”* var en av de strategier som större delen av eleverna använde sig av och då speciellt i den första additionsuppgiften 4+__=9. Ahlberg (1995) menar att denna strategi underlättar huvudräkningsarbetet och därför undrar vi varför eleverna inte använder sig av denna strategi i den andra additionsuppgiften inom det högre talområdet. Dock stämmer resultatet överrens med de Löwing (2008) påstår, nämligen att eleverna vid uppgifter med tiotalsövergång utgår från tiokamraterna. Detta menar författaren gäller för slutna utsagor, men genom vår undersökning kan vi även konstatera att detta gäller för uppgifter med en öppen utsaga.

Även strategin som bland annat Adler (2007) kallar för *inversen* används, i stort sett, endast inom additionsuppgiften i det högre talområdet och inom subtraktionsuppgiften i det lägre talområdet. Vi ställer oss frågan varför eleverna inte gör om subtraktionsutsagan 26-__=19 inom det högre talområdet till en additionsuppgift då de gör om den något svårare additionsutsagan 17+__=21 till en subtraktionsuppgift. Vi kan här dra en parallell till Löwing (2011) och Johansson (2011) som anser att subtraktion är ett svårare räknesätt än addition.

Vidare poängterar Adler (2007) vikten av att elever inser att *addition är inversen till subtraktion* och vice versa. Flertalet av våra elever använder sig av denna strategi då de gör om uppgiften 9-__= 3 till 3+__= 9. McIntosh (2010) menar att eleverna, utifrån de två räknesätten addition och subtraktion, endast behöver träna på additionstabellen då de kan härleda denna kunskap till subtraktionsuppgifter. Därigenom kan de sedan se sambandet mellan de två räknesätten, nämligen att addition är inversen till subtraktion och vice versa.

Vi har genom vår undersökning konstaterat att eleverna är bekanta med öppna utsagor genom sina matematikböcker. Då matematikboken till stor del ger upphov till att träna proceduella förmågor förväntade vi oss därför att eleverna skulle använda sig av strategin som Ahlberg (1992) benämner *inlärda talfakta* i större utsträckning än vad de gjorde. Kilborn (1989) beskriver vårt talsystem som mycket komplicerat vilket kan vara en anledning till att eleverna inte använde sig av inlärda talfakta i den utsträckning som vi hade förväntat oss.

Skolverket (2011) tar upp vikten av att elever reflekterar över och värderar de strategier de väljer att tillämpa. Vi ser dock att detta inte är tillräckligt då eleverna även enligt Löwing (2008) och Kilborn (1989) behöver kunna generalisera strategierna för att behärska dem i högre talområden. Ett exempel på någon som inte kan generalisera strategierna är Kajsa som använder fyra olika strategier i uppgifterna inom det lägre talområdet, men när hon tar sig an uppgifterna i det högre talområdet klarar hon inte av att lösa dem. De tre problemtyperna som Kilborn (1989) menar är de vanligaste inom subtraktion, *ta bort, lägga till/ komplettera* och *jämförelse*, är de som färst antal elever har använt sig av i vår undersökning. Vi ser att det framförallt är märkligt att eleverna inte har använt sig av strategin *lägga till/ komplettera* i större utsträckning eftersom den enligt Kilborn (1989) har formen av en öppen utsaga. *Nedåträkning till delen* är det som eleverna använder i stor utsträckning vid subtraktion. Johansson (2011) samt Olsson och Forsbäck (2008) menar att nedåträkning är svårare för elever då de samtidigt måste göra en uppåträkning för att se hur många steg de har räknat.

6.2. Missuppfattningar

Bland eleverna förekommer sju missuppfattningar inom subtraktion, medan de bara är tre stycken inom addition. Dessa förekommer framförallt i uppgifterna inom det högre talområdet och i samband med strategin *nedåträkning till delen*. Även detta ser vi beror på att eleverna enligt Löwing (2011) och Johansson (2011) har svårare för subtraktion än addition. Löwing (2008) och Kilborn (1989) ser att eleverna måste automatisera sina additionskunskaper inom talområdet 1-10 då deloperationerna annars blir för många. I samband med att dessa ökar blir de svåra för eleven att hålla reda på då arbetsminnet enligt Löwing (2008) är begränsat.

En missuppfattning vi har uppmärksammat i samband med både additions och subtraktionsuppgifterna är att eleverna väljer att addera summa och term vilket är samma sorts missuppfattning som förekommer i nationella proven (Skolverket, 2010b). Den här missuppfattningen kan enligt Ahlberg (2000) bero på att eleverna i allt för stor utsträckning räknar med algoritmer utan att reflektera över vad de egentligen gör. Detta kan enligt Löwing (2008) och Kilborn (1989) bli ett hinder i elevernas matematiska utveckling då de får svårt att generalisera sina kunskaper. I Marklunds (1993) studie var eleverna, i många fall, konsekventa i sitt algoritmräknande där de lägger samman ental för sig och tiotal för sig vilket även har förekommit i vår studie. Eftersom eleven i fråga har systematiserat detta sätt att tänka använder även eleven detta vid subtraktionsuppgifter där lösningen i vissa fall inte blir felaktig då detta är en vedertagen subtraktionsstrategi. Detta kan exemplifieras med uppgiften 9-__=3 då 9-3 är svaret. Vid tillämpningen av samma strategi men med tvåsiffriga tal uppstår dock ett annat problem. En elev som då är van att tänka i algoritmer kan då vid talet 26-__=19 subtrahera entalen och tiotalen för sig. Detta innebär att eleven vid entalssubtraktion får 6-9 vilket ger ett negativt tal som i sin tur visar på att eleven har bristande kunskap kring den kommutativa lagen som är grundläggande vid beräkningar inom addition. Vi uppfattar att den elev i vår studie som använder sig av strategin, som Marklund (1993) benämner *väljer ordning*, inte ser att svaret är orimligt. Detta stämmer överens med vad Palm (2011) anser, nämligen att elever inte reflekterar över sina svar i tillräckligt stor utsträckning.

6.2.1. Likhetstecknet

När det kommer till likhetstecknet menar Kilborn (1989) att vi antingen tillför detta en statisk eller dynamisk innebörd. Det betyder att de som använder ordet *är* lika med tillför likhetstecknet en statisk innebörd medan de som använder ordet *blir* lika med tillför det en dynamisk innebörd. I vårt resultat använder sig däremot eleverna av båda uttrycken. De flesta av eleverna hade även uppfattningen att det skulle vara lika mycket på båda sidor om likhetstecknet. Enligt Bergsten m.fl. (1997) har de elever som använder ordet *är* förståelsen för att det samtidigt ska vara lika mycket i höger och vänsterled, medan de som säger ”blir” ser det som något som går från vänsterled till högerled.

6.3. Vardagliga sammanhang

Många av eleverna hade svårt att vardagsanknyta de typer av uppgifter som vi använde oss av i undersökningen. Detta kan sättas i relation till vad Skolverket (2011) uttrycker i kursplanen för matematik, nämligen att elever ska kunna tillämpa matematiska kunskaper i vardagliga sammanhang. Anledningen till att eleverna hade svårt för detta kan vara, som Bergsten m.fl. (1997) redogör för, att vägen mot algebran är så abstrakt att eleverna har svårt att göra någon vardagsanknytning. Kanske var den abstrakta formen på våra öppna utsagor orsaken till att eleverna hade svårt att göra någon koppling mellan dessa och en vardagsanknuten situation.

När eleverna fick uppgiften att göra två räknehändelser förväntade vi oss att de skulle koppla dessa till öppna utsagor eftersom det ingick i denna uppgift. Resultatet blev dock annorlunda då det visade sig att eleverna i additionsräknehändelsen inte klarade av att koppla detta till en öppen utsaga. I subtraktionshändelserna var det endast en som kopplade detta fullt ut till en öppen utsaga. En annan elev gjorde en förklaring enligt en öppen utsaga men vid nedtecknandet av uppgiften blev det istället en sluten utsaga. Vi är tveksamma till om dessa elever har använt sig av en öppen subtraktionsutsaga med flit eller om det är en tillfällighet.

Det är intressant att notera att eleverna inte klarade av att göra räknehändelser till uppgifterna då några av dem kunde förklara hur de tänkte genom att, under intervjun, berätta en räknehändelse till en öppen utsaga. Kanske hade resultatet sett annorlunda ut om eleverna fått använda konkreta föremål att laborera med i samband med att de gjorde räknehändelsen. Malmer (1984) påpekar vikten av att elever knyter samman matematiken med räknehändelser för att göra matematiken mer konkret genom att ta in elevernas vardagsnära stoff. Vidare kan vårt resultat bero på att elever, i stor utsträckning, är vana vid att göra räknehändelser till slutna utsagor men inte till öppna utsagor. Vår tolkning av detta är att eleverna därav har svårare att vardagsanknyta öppna utsagor. Eleverna verkar vara läromedelsbundna då några av dem väljer att använda karaktärer i sina räknehändelser som är figurer i matematikboken. Ett sådant exempel finns representerat i bilaga 5 (bild 4). Vidare använder eleverna sig även av lättavbildade föremål i sina räknehändelser vilket vi ser kan vara en begränsning i deras sätt att vardagsanknyta uppgiften. Vi kan i resultatet se att elever har haft lättare att konstruera räknehändelser till öppna subtraktionsutsagor. Då subtraktion är ett svårare räknesätt än addition är detta en intressant iakttagelse eftersom det avviker från författarnas resonemang. Anledning till det kan vara att eleverna använder sig av strategin *lägga till/ komplettera* då den enligt Kilborn (1989) egentligen har formen av en öppen utsaga.

6.4. Sammanfattande diskussion

Studien har synliggjort att variationen av strategier som elever i årskurs två använder vid öppna utsagor är stor (se bilaga 6). Då Löwing (2011) nämner att lärare idag inte arbetar med öppna utsagor i större utsträckning ser vi vikten av att lärare tillgodogör sig vår undersökning för att se skillnaden i elevers sätt att lösa öppna och slutna utsagor. Flera författare anser att subtraktion är det svårare räknesättet vid slutna utsagor vilket det i vår undersökning också visar sig vara vid öppna utsagor där missuppfattningarna var mer än dubbelt så många i subtraktion än addition. Däremot visade det sig att eleverna i vår undersökning trots svårigheterna med subtraktion hade lättare för att relatera de öppna subtraktionsutsagorna till vardagliga sammanhang. I vår studie finns tydliga kopplingar mellan vår litteraturgenomgång och vårt resultat men vi vill också belysa vikten av skillnaderna mellan dessa.

6.5. Didaktiska implikationer

Vår studie har stor relevans för lärare, lärarstudenter och föräldrar samt andra personer som är intresserade av hur elever tänker när de löser öppna utsagor. Resultatet av undersökningen kan vara till hjälp för lärare när de ska planera sin matematikundervisning så att den bidrar till att utveckla elevernas matematiska tänkande kring olika lösningsstrategier. Det finns omfattande forskning som behandlar hur elever löser slutna utsagor och vi har genom vår studie visat att delar av denna forskning till viss del stämmer överens med hur elever löser öppna utsagor. Vi upptäckte att eleverna vid sina lösningar av öppna utsagor knappt använder sig de tre problemtyperna för subtraktion vilket lärare bör ha i åtanke när de undervisar i olika sätt att lösa öppna utsagor. En av de vanligaste strategierna i vår undersökning var istället *nedåträkning till delen* vilket är en strategi som lärare särskilt bör ha i åtanke när de undervisar eftersom denna strategi gav upphov till missuppfattningar. Vår studie visar även att elever har svårt att knyta an öppna utsagor till vardagliga sammanhang och det är därför viktigt att lärare tar upp och synliggör exempel på konkreta och vardagsnära situationer.

7. Förslag till fortsatt forskning

Vi har sett att det inte finns så mycket forskning om hur elever tänker när de löser öppna utsagor. Detta har gjort att vi under arbetets gång har uppmärksammat många områden där vidare forskning skulle behövas. Ett av dessa områden är hur lärares undervisning påverkar elevernas val av strategier samt hur lärare arbetar med algebra i de tidiga skolåren. Vi ser också att det förekommer missuppfattningar bland eleverna och att det hade varit inressant att forska vidare kring vad lärare bör tänka på för att elever inte ska missuppfatta öppna utsagor.

Då eleverna i vår studie hade svårt att knyta an öppna utsagor till vardagliga sammanhang kan det också vara relevant att undersöka vad detta kan bero på. Även lärarnas sätt att undervisa i hur eleverna kan konstruera räknehändelser kan vara intressant eftersom merparten av eleverna i vår studie gjorde räknehändelser med slutna utsagor som egentligen skulle vara öppna utsagor. Det hade också varit spännande att se om resultatet hade påverkats av om vi bytt ut siffrorna i de öppna utsagorna mot konkret material. Hade det då även blivit lättare för eleverna att knyta an uppgifterna till vardagliga sammanhang?

Referenslista

Adler, B. (2007). *Dyskalkyli & Matematik: en handbok i dyskalkyli.* Höllviken: Nu-förlaget.

Ahlberg, A. (1992). *Att möta matematiska problem: en belysning av barns lärande.* Göteborg: Universitetet i Göteborg.

Ahlberg, A. (1995). *Barn och matematik: problemlösning på lågstadiet.* Lund: Studentlitteratur.

Ahlberg, A. (1998). *Meeting mathematics: educational studies with young children*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Ahlberg, A. (2000). Att upptäcka matematikens språk. I Wallby, K.,Emanuelsson, G., Johansson, B., Ryding, R. & Wallby, A. (red). *Matematik från början* (ss.61-70). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.

Alexandersson, M. (1994). *Metod och medvetande*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis. (Göteborg studies in educational sciences 96).

Allwood, C.M., & Eriksson, M. (2010). *Grundläggande vetenskapsteori: för psykologi och andra beteendevetenskaper.* Lund: Studentlitteratur.

Bell, J. (2006). *Introduktion till forsknings-metodik.* Lund: Studentlitteratur.

Bergsten, C., Häggström, J. & Lindberg, L. (1997). *Algebra för alla.* Mölndal: Institutionen för ämnesdidaktik.

Birkler, J. (2008). *Vetenskapsteori: en grundbok.* Stockholm: Liber AB

Carlsson, B. (1991). *Kvalitativa forskningsmetoder: för medicin och beteendevetenskap.* Solna: Almqvist & Wiksell.

Claesson, S. (2007). *Spår av teorier i praktiken: några skolexempel.* Lund: Studentlitteratur.

Denscombe, M. (2004). *Forskningens grundregler: samhällsforskarens handbok i tio punkter*. Lund: Studentlitteratur.

Doverborg, E. & Pramling Samuelsson, I. (2000). *Att förstå barns tankar: metodik för barnintervjuer.* Stockholm: Liber.

Doverborg, E. & Pramling Samuelsson, I. (2007). *Förskolebarn i matematikens värld*. Stockholm: Liber AB.

Eliasson, A. (2010). *Kvantitativ metod från början*. Lund: Studentlitteratur.

Eriksson, G. (2004). *Tidig aritmetisk kunskapsbildning: ett radikalkonstruktivistiskt perspektiv.* Stockholm: Stockholms universitet.

Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978). *The child´s understanding of number.* Cambridge: Harvard Univ. Press..

Grønmo, L.S. (1999). Att sätta ord på algebra. *Nämnaren, 26*(1), 19-25.

Grønmo, L.S. (2011). Likhetstecknets innebörd. I Bergius, B., Emanuelsson, G., Emanuelsson, L. & Ryding, R. (red). *Matematik - ett grundämne* (ss. 123-126). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.

Hultén, P. Hultman, J.& Eriksson, L. T. (2007). *Kritiskt tänkande.* Malmö: Liber

Häggström, J. (1996). Förstå algebra. *Nämnaren, 23*(1), 38-44.

Häggström, J. (2011). Algebra utan symboler. I Bergius, B., Emanuelsson, G., Emanuelsson, L. & Ryding, R. (red). *Matematik - ett grundämne* (ss. 139-150). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.

Johansson, B. & Wirth, M. (2007). *Så erövrar barnen matematiken: talraden ger nya möjligheter.* Uppsala: Kunskapsföretaget.

Johansson, B. (2011). Antal. Addition och Subtraktion. I Bergius, B., Emanuelsson, G., Emanuelsson, L. & Ryding, R. (red). *Matematik - ett grundämne* (ss. 65-72). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.

Kilborn, W. (1989). *Didaktisk ämnesteori i matematik. Del 1, Grundläggande aritmetik.* Stockholm: Utbildningsförlaget.

Kvale, S. & Brinkmann, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M. & Kilborn, W. (2003). *Huvudräkning en inkörsport till matematiken*. Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M. (2008). *Grundläggande aritmetik: matematikdidaktik för lärare.* Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M. (2011). Elevers kunskaper i aritmetik. I Bergius, B., Emanuelsson, G., Emanuelsson, L. & Ryding, R. (red). *Matematik - ett grundämne* (ss. 79-84). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.

Malmer, G. (1984). *Matematik – ett ämne att räkna med.* Solna: Esselte studium.

Malmer, G. (2002). *Bra matematik för alla: nödvändig för elever med inlärningssvårigheter*. Lund: Studentlitteratur.

Marklund, C-S. (1993). För mycket algoritmtänkande?. *Nämnaren, 20*(3), 13-16.

Marton, F. & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, N.J.: Erlbaum.

Marton, F. & Booth, S. (2000). *Om lärande*. Lund: Studentlitteratur.

McIntosh , A. (2010). *Förstå och använda tal: en handbok*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.

Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens rötter*. Stockholm: Utbildningsförlaget.

Olsson, I. & Forsbäck, M. (1998). Tankeutmaningar. *Nämnaren, 25*(2), 16-19.

Olsson, I & Forsbäck, M. (2008). *Alla kan lära sig matematik*. Stockholm: Natur & Kultur.

Palm, A. (2008). Missuppfattningar i algebra: problem för läraren eller eleven?. *Nämnaren, 35*(3), 38-42.

Palm, T. (2011). Problem med verkligheten. I Bergius, B., Emanuelsson, G., Emanuelsson, L. & Ryding, R. (red). *Matematik - ett grundämne* (ss. 89-96). Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM.

Patel, R & Davidsson, B. (2011) . *Forskningsmetodikens grunder: att planera, genomföra och rapportera en undersökning.* Lund: Studentlitteratur.

Persson, P-E. (2010). *Räkna med bokstäver: en longitudinell studie av vägar till en förbättrad algebraundervisning på gymnasienivå.* Luleå: Luleå tekniska universitet.

Skolverket. (2008). *Svenska elevers matematikkunskaper i TIMSS 2007: en jämförande analys av elevernas taluppfattning och kunskaper i aritmetik, geometri och algebra i Sverige, Hong Kong och Taiwan.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2010a). *Rustad att möta framtiden?: PISA 2009 om 15 åringars läsförståelse och kunskaper i matematik och naturvetenskap.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2010b). *Ämnesproven i grundskolans årskurs 3 - En redovisning av utprövningsomgången 2009.* Stockholm: Skolverket.

Skolverket. (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011.* Stockholm: Skolverket.

Solhem, I.H. & Reikerås, E.K.L. (2004). *Det matematiska barnet*. Stockholm: Natur och kultur.

Stukát, S. (2005). *Att skriva examensarbete inom utbildningsvetenskap.* Lund: Studentlitteratur.

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Wallby, K. & Wallby, A. (2007). Det lönar sig att försöka. *Nämnaren, 34*(3), 34-34.

Williams, P. (2006). *När barn lär av varandra: samlärande i praktiken.* Stockholm: Liber.

Bilaga 1.

Informations- och samtyckesbrev till elever och föräldrar i årskurs 2

Hej!

Vi är två studenter, Catharina Ahlin och Zandra Nilsson, som läser sista året på lärarutbildningen vid Högskolan i Halmstad. Vi kommer i höst att skriva vårt examensarbete med inriktning mot matematik där syftet är att ta reda på vilka strategier elever i årskurs 2 använder sig av när de löser en viss typ av matematikuppgifter. Vi kommer att genomföra en intervjustudie där vi ställer frågor till eleverna om hur de löser dessa uppgifter.

Intervjuerna, som utgör grunden till studien, kommer att spelas in för att underlätta analysarbetet. Både skolan och eleverna kommer att behandlas konfidentiellt, och endast vi tar del av det inspelade materialet. När studien är avlutad kommer inspelningarna att raderas. Även citat och referat som förekommer i uppsatsen kommer att avidentifieras. Medverkan är frivillig och enligt personuppgiftslagen (1998:204) har uppgiftslämnaren rätt till att dra sig ur, både under och efter intervjun. Det medföljer även en kopia av samtyckesbrevet att erhålla. Uppsatsen kommer att finnas tillgänglig på Högskolan i Halmstad från och med Mars 2012.

Har ni frågor eller funderingar är ni välkomna att höra av er till Catharina Ahlin: xxxxxxx@student.hh.se eller Zandra Nilsson: xxxxxxx@student.hh.se.

Ni kan även kontakta våra handledare Carina Stenberg: xxxxxxx@hh.se eller Jan-Olof Johansson: xxxxxxx@hh.se.

Tack för visat intresse!

Med vänliga hälsningar
Catharina Ahlin & Zandra Nilsson

Elevens namn:____

Jag/vi och mitt/vårt barn samtycker till ovanstående villkor **JA** ☐ **NEJ** ☐

Elevens underskrift:____________________________

Vårdnadshavarens underskrift: ____________________________________

Ort och datum:____

Bilaga 2.

Intervjuguide

Inledning

Som du kanske redan vet så är jag här idag för att fråga dig lite om matematik. Jag går, som jag också har berättat innan, i skolan för att bli lärare och nu ska jag och en klasskompis göra en undersökning om hur elever i tvåan tänker när de löser en viss typ av matematikuppgifter. Detta gör vi för att vi ska kunna hjälpa våra elever på ett bättre sätt när vi blir färdiga lärare. Intervjun kommer att ta ungefär en halvtimme. Går det bra om jag spelar in vårt samtal?

Bakgrundsvariabler och inledande fråga

- Vad heter du?
- Hur gammal är du?
- Vad tycker du om matematik?

Instruktioner

Denna intervju vi ska göra nu kommer att gå till så att du kommer få en uppgift av mig som du ska lösa, och samtidigt som du löser uppgiften skulle det vara bra om du ville berätta för mig om hur du tänker när du räknar ut svaret du får fram.

Uppgifter

4 + __ = 9; 9 - __ = 3; 17 + __ = 21; 26 - __ = 19

Intervjufrågor med förslag till underfrågor

1. Vad står det i uppgiften?
- har du sett en liknande typ av uppgift tidigare?
- om eleven svarar JA: Var då?

2. Hur tänker du när du löser denna uppgift?
- vilken siffra börjar du på?
- använder du något/några hjälpmedel?

3. Om du hade en kompis som inte förstod hur uppgiften skulle lösas, hur hade du förklarat för din kompis då?

4. Finns det något annat sätt att lösa denna uppgift?

5. Vilket sätt tycker du är lättast att använda?
   - hur kommer det sig?

6. Vet du vad likhetstecknet betyder?
   - kan likhetstecknet stå före plustecknet?

Avslutande frågor

7. När kan det vara bra att kunna lösa sådana uppgifter som du precis löste?

8. Har du gjort en räknehändelse/räknesaga någon gång?
   - om JA: då vill jag att du gör en räknehändelse/räknesaga till två av de uppgifter som du precis har löst. En med addition – plus, och en med subtraktion – minus.

9. Hur tänkte du när du gjorde den här räknehändelsen?

Tack för att jag fick intervjua dig. Hur kändes det att bli intervjuad? Finns det något du vill fråga eller något som du har funderingar kring?

Bilaga 3.

Tabell 1

Strategier vid addition

A ett till ett-principen
B räkna ental i tre steg
C räkna ental i två steg
D räkna från första
E att gruppera fingrarna och se strukturer
F inlärd talfakta
G omgestaltning av tal
H omgestaltning av dubblor
I talkamraterna och uppdelning av tal
J addition är inversen till subtraktion
K systematisk prövning
L missuppfattning

Uppgifterna till vilka eleverna valde strategierna

1 uppgift 4+__=9
2 uppgift 17+__=21

Strategi / Elev	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Kajsa	1						1					2
Kalle						1		1	2			
Daniel	2			2;2								1
Nelly	1		1		1			1	2	2		
Nils	2							1	2			
Pelle	1;2		1;2					1	2			
Noelia	2			2;2				1	1			
Filip	1	1				1		1	2;2			
Leja	2		2					1		2		
Fia						2		1	2			
Allie	1;2		1;2;2			1						
Nova	2		2					1	2	1		
Elsa	2							1;2		2	1	
Max						1;2		1	2	2		
Teo						2		1				2

Bild 1.

Bilaga 4.

Tabell 2

Strategier vid subtraktion

a ett till ett-principen
b talgestalter
c subtraktion är inversen till addition
d ta bort
e lägga till/ komplettera
f jämförelse
g nedåträkning till delen
h uppräkning från delen
i relatera andra räkna bort uppgifter
j kompensationsstrategin
k inlärd talfakta
l upprepad addition
m systematisk prövning
n missuppfattning

Uppgifterna till vilka eleverna valde strategierna

3 uppgift 9-__=3
4 uppgift 26-__=19

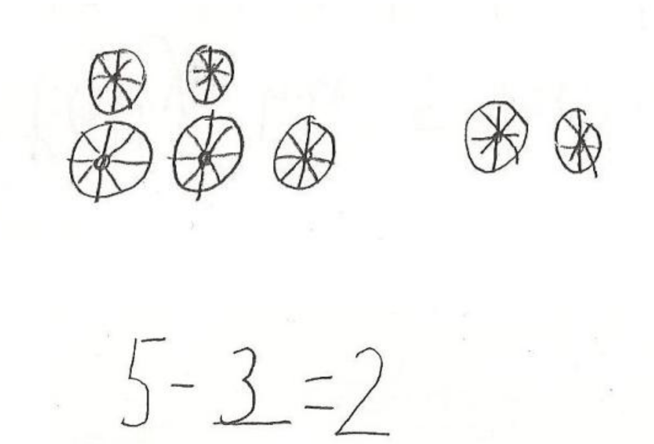
Strategi / Elev	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
Kajsa								3			3	3		4
Kalle														3
Daniel							3;4				4			
Nelly	3;4				3		3;4							3
Nils	3		3					3	4;4	3				
Pelle	3;4		3				3;4		4					
Noelia	3		3				3		4					
Filip	3;4						4		4			3;3		
Leja	3						3;4	3;4						4
Fia			3						4			3		
Allie	4						3;4		3;4		3			4
Nova	3		4			3	3	3			3		3	
Elsa	3;4						3							4
Max			3;4								3			
Teo		3	3	3										4

Bild 2.

Bilaga 5.

Exempel på räknehändelser av två elever

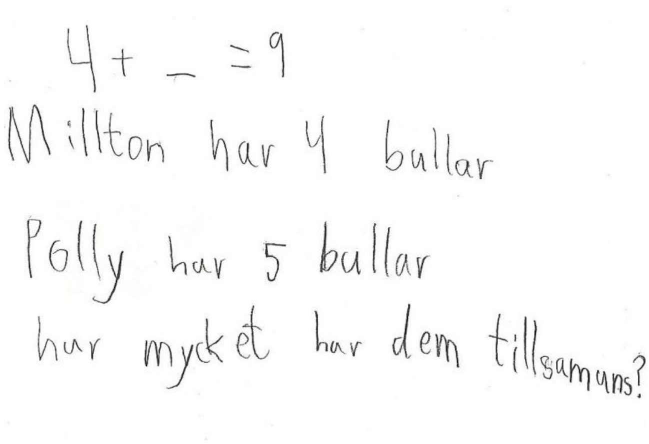
Allies räknehändelse



Räknehändelsen till vänster är producerad av den elev som gjorde en räknehändelse utifrån en öppen subtraktionsutsaga.

Bild 3.

Max räknehändelse



Räknehändelsen till vänster visar att eleven har valt figurer ur matematikboken som karaktärer i sin egen räknehändelse.

Bild 4.

Bilaga 6

Strategier i alfabetisk ordning

Här presenteras kortfattat de strategier vilka eleverna använder när de löser öppna utsagor.

Addition är inversen till subtraktion – innebär att eleverna förstår att t. ex. 4+5 kan lösas genom att de vet att 9-4=5. De ser här räknesätten som varandras motsatser.

Att gruppera fingrarna och se strukturer – innebär att eleverna grupperar den första termen på fingrarna som därigenom uppfattas som en helhet. Därefter räknar de upp den andra termen med ett finger i taget. En annan variant är att använda fingrarna för att se talens del-helhets-relation genom att gruppera varje term utan att göra någon uppräkning.

Ett till ett-principen – innebär att eleverna anger en siffra per föremål, vilka vanligtvis utgörs av deras fingrar. Eleverna höjer då ett finger för varje tal de räknar upp.

Inlärd talfakta – innebär att eleverna är så bekanta med uppgifterna att de kan utföra beräkningarna direkt, utan att räkna.

Jämförelse – innebär att elever bildar par mellan helheten och delen. Detta kan illustreras genom att eleverna gör en rad med nio föremål för att sedan lägga fyra föremål i en rad bredvid. Därefter kan de se hur många föremål som blir ensamma.

Kompensationsstrategin – innebär att elever som t. ex. vet att 15+15=30 kan addera och subtrahera på olika sidor om likhetstecknet för att lösa andra uppgifter. De kan därigenom se att 14+16=30 eftersom 14 är ett mindre än 15 och 16 är ett mer än 15.

Lägga till/ komplettera – innebär att eleverna t. ex. löser uppgiften 9-4 genom att räkna ut hur mycket som ska läggas till från fyra för att komma upp i nio. De kontrollerar sedan med fingrarna hur många steg som räknats upp. Om detta hade varit en additionsuppgift hade det varit i form av en öppen utsaga som t. ex. 4+__=9.

Nedåträkning till delen – innebär att eleverna delar upp en mängd i två delmängder. Vid uppgiftsexemplet 9-4 räknar de ner till delen i fyra steg (8,7,6,5) och får då svaret fem.

Omgestaltning av ”dubblor” – innebär att en uppgift kan lösas genom omgestaltning då eleverna känner till en annan liknande uppgift med dubblor. Exempelvis kan uppgiften 4+5 lösas genom att de omgestaltar dubblan 4+4 genom att addera ett.

Omgestaltning av tal – innebär att en uppgift kan lösas genom omgestaltning då eleverna känner till en annan liknande uppgift. Exempelvis kan uppgiften 4+5 lösas genom att eleverna vet att 4+6=10. Eftersom den ena termen är ett större än termen i den första utsagan minskar eleverna med ett på båda sidor om likhetstecknet.

Relatera andra räkna bort uppgifter – innebär att elever som t. ex. vet att 15-5=10 kan relatera detta till uppgifter som 15-6 vilket spar dem en längre räkneprocedur. De kan även relatera uppgifter som skiljer i tiotal till varandra då t. ex. 17+4 kan relateras till 7+4.

Räkna ental i tre steg – innebär att eleverna, med fingrar eller talgestalter, räknar upp den första termen i uppgiften för att sedan göra likadant med den andra. De räknar ut summan genom ytterligare en uppräkning från början där termerna sammanfogas till en helhet.

Räkna ental i två steg – innebär en kombination av fingerräkning och inre föreställningar då eleverna räknar ut summan direkt genom att konstruera en bild av det sista talet med sina fingrar, innan det påbörjar uppräkningen av det första.

Räkna från första – innebär att eleverna vid uppgiftsexemplet 4+5 börjar räkna från fyra för att sedan räkna 5, 6, 7, 8, 9 där det sist uppräknade talet utgör svaret på uppgiften.

Subtraktion är inversen till addition – innebär att eleverna förstår att t. ex. 9-3 kan lösas genom att de vet att 3+6=9. De ser här räknesätten som varandras motsatser.

Systematisk prövning – innebär att eleverna prövar sig fram till ett svar genom att systematiskt lägga till lite åt gången tills de når det sökta talet.

Ta bort – innebär att eleverna vid uppgiftsexemplet 9-3 först räknar upp grundmängden, nio, för att därefter räkna upp delmängden, tre, ur grundmängden. Differensmängden får de genom att räkna återstoden som i detta fall är sex.

Talgestalter – innebär att eleverna kan se ett tal genom ett visst mönster. Exempel på sådana mönster finns t. ex. på tärningar och dominobrickor.

Talkamrater och uppdelning av tal – innebär att eleverna vid uppgiften 6+7 t. ex. använder tiokamraterna 7+3. De måste då även kunna dela upp talet 6 i 3+3. Kombinationen av dessa kunskaper leder till att 7+6=7+(3+3)=(7+3)+3=10+3.

Upprepad addition – innebär att eleverna adderar ett visst antal grupper med en lika stor mängd i varje grupp. Detta kan illustreras med exemplet 4+4+4 vilket kan ses som $3 \cdot 4$.

Uppräkning från delen – innebär att eleverna vid t. ex. 12-7 börjar på sju för att sedan räkna upp till tolv i fem steg vilket är i likhet med strategin *lägga till/ komplettera*. Skillnaden ligger i att de här inte behöver kontrollera hur många som räknats upp.